

Quantitative Untersuchung der Leistungsbilanz eines vollständig ionisierten He-Plasmas*

Von JACQUES DURAND

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
(Z. Naturforsch. **18 a**, 281—299 [1963]; eingegangen am 25. September 1962)

Die Temperatur ($T=3$ bis $4 \cdot 10^4$ °K) und die Elektronendichte ($n_e=2$ bis $11 \cdot 10^{16}$ cm $^{-3}$) eines stationären vollständig einmal ionisierten He-Plasmas wurden auf verschiedene Arten gemessen. Es zeigte sich, daß sich das Plasma im lokalen thermischen Gleichgewicht befand. Weiterhin wurden die Temperatur- und Dichtegradien bestimmt. Der aus den Zustandsgrößen und ihren Gradienten berechnete Wärmeverlust des Plasmas wurde mit der gemessenen Zufuhr der elektrischen Energie verglichen. Es ergab sich keine Notwendigkeit, zur Erklärung der Energieabfuhr andere Vorgänge als die klassische Wärmeleitung und Strahlungsverluste heranzuziehen.

Untersuchungen, ähnlich der vorliegenden, wurden unseres Wissens bisher nur von MAECKER und seinen Schülern durchgeführt¹. Mit dem von MAECKER angegebenen stationär brennenden, wandstabilisierten Lichtbogen (Kaskadenbogen) erreicht man jedoch nur Temperaturen bis zu 15 000 °K.

Höhere Temperaturen — maximal etwa 45 000 °K — als im Kaskadenbogen und daher vollständige Ionisation erzielt man mit einem von WULFF² angegebenen abgeschlossenen Entladungsrohr, dessen modifizierte, von uns benutzte Form wir später genau beschreiben werden. Während der Brenndauer von ungefähr 1 ms ist die Entladung — abgesehen von den demgegenüber sehr kurzzeitigen Einstellvorgängen — stationär. Der magnetische Druck $-\int_0^r j_z B_\varphi dr$ — ist immer klein gegen den Gasdruck $-nkT$ —. Die Beobachtung zeigt einen Entladungskanal, der den ganzen Rohrquerschnitt erfüllt und keine Instabilitäten aufweist.

Im *ersten Teil* der Arbeit wird zunächst ein Überblick über die Entladungsanordnung gegeben — so dann werden detaillierter die experimentellen Methoden beschrieben, mit denen die folgenden Größen bestimmt wurden:

- α) Die Anregungstemperatur, räumlich und zeitlich aufgelöst, bestimmt aus dem Intensitätsverhältnis einer He I- und einer He II-Linie.
- β) Die DOPPLER-Temperatur, bestimmt aus der Verbreiterung einiger O II-Linien.
- γ) Die Elektronendichte, ebenfalls räumlich und zeitlich aufgelöst, gewonnen aus der STARK-Verbreiterung neutraler He-Linien.

- δ) Die Elektronendichte, räumlich aufgelöst, bestimmt aus der Messung der Absolutintensität einer He I-Linie.
- ϵ) Potentiale und Ströme der Entladung in ihrem zeitlichen Verlauf.

Im *zweiten Teil* werden Betrachtungen über Anregungs- und Ionisationsverhältnisse angestellt, die erwarten lassen, daß sich das Plasma — wegen der relativ hohen Elektronendichte — im lokalen thermischen Gleichgewicht befindet.

Die Auswertung der Temperatur- und Elektronendichtemessungen, die mit Hilfe der im ersten Teil beschriebenen experimentellen Anordnungen gemacht wurden, wird dann durchgeführt.

Die gute Übereinstimmung der aus verschiedenen Messungen erhaltenen Ergebnisse bestätigt die obigen Erwartungen und erlaubt, die Gleichungen des thermodynamischen Gleichgewichts zu verwenden.

Im *dritten Teil* werden die Werte des spezifischen elektrischen Widerstands ermittelt und mit den theoretischen Werten verglichen. Innerhalb einer Fehlergrenze von $\pm 8\%$ stimmen diese Werte überein.

Im *vierten Teil* wird die Leistungsbilanz aufgestellt. Als Mechanismen zur Leistungsabfuhr sind darin nur die Wärmeleitung durch freie Elektronen und die Strahlung des Heliums berücksichtigt. Die Berechnung der optisch dünnen Strahlung aus den gemessenen Zustandsgrößen des Plasmas bereitet keine Schwierigkeit. Die exakte Berechnung der Strahlung im Bereich optisch nicht-dünner Linien ist jedoch so aufwendig, daß sie im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden kann. Abschätzun-

* Dissertation der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule, München 1962.

¹ H. MAECKER, Z. Phys. **158**, 392 [1960].

² H. WULFF, Z. Phys. **150**, 614 [1958].



gen erweisen sie jedoch als im Vergleich zur optisch dünnen Strahlung nicht vernachlässigbar klein.

Mehr als 40 % der gesamten zugeführten Leistung führen allein die Wärmeleitung durch freie Elektronen und die Strahlung aus optisch dünner Schicht wieder ab. Beachtet man ferner, daß sich experimentelle Fehler oder Abweichungen von idealen Versuchsbedingungen (siehe dazu die Seiten 286 und 295) immer in dem Sinne auswirken, daß sich die Leistungsabfuhr als zu gering ergibt, so kann geschlossen werden, daß andere Mechanismen zur Leistungsabfuhr als die durch Strahlung und Wärmeleitung nicht vorherrschen können.

I. Experimentelle Anordnung

a) Entladungsrohr

Das Rohr besteht aus geschmolzenem Quarz und ist an reine Aluminiumelektroden gekittet. Wegen seiner Form wird es auch Eieruhr genannt. Durch die große Oberfläche der Elektroden (Abb. 1) werden geringe Stromdichten vor den Elektroden erzielt. Im Mittelteil des Rohres zeigen sich keine Aluminiumverunreinigungen. Das Kitten mit Lekutherm muß an der äußeren

Oberfläche vorgenommen werden, wo kein Kontakt mit der Entladung möglich ist, um Kohlenstoffverunreinigungen zu vermeiden. Die planparallelen Quarzfenster erlauben eine „end-on“-Beobachtung. Die Sonden zur Messung der Spannung bestehen aus Wolfram; sie sind mit Lekutherm auf Löcher von 2 mm Durchmesser in der Rohrwand gekittet. Diese Anordnung verhindert zusätzliche Verunreinigungen in der Entladung.

Das Rohr wird so lange auf 10^{-4} Torr ausgepumpt, bis die Gasabgabe der Wand kleiner als 10^{-6} Torr \cdot l \cdot s $^{-1}$ geworden ist. Dann wird es mit spektralreinem Helium bis zu Drucken zwischen 10 und 80 Torr gefüllt.

b) Elektrische Anordnung

Die Stromquelle, die einen konstanten Strom liefert, besteht aus einer Verzögerungskette, die mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen ist (Abb. 2). Die Kette liefert einen maximalen Strom von 6,5 kA während 0,7 ms, wenn sie auf ihre maximale Spannung von 9 kV geladen ist. Da die Spannung der Kette für die Zündung des Rohres nicht ausreicht, wurde eine kleine 18 kV-Hilfsentladung vor der Hauptentladung gezündet.

Die relativen Stromschwankungen sind kleiner als 5% (Abb. 3 *).

Die Strommessung erfolgte durch Messung der Spannung über einen Widerstand der Zuleitung von 2,5 m Ω . Um die Verfälschung der Messung durch induktive

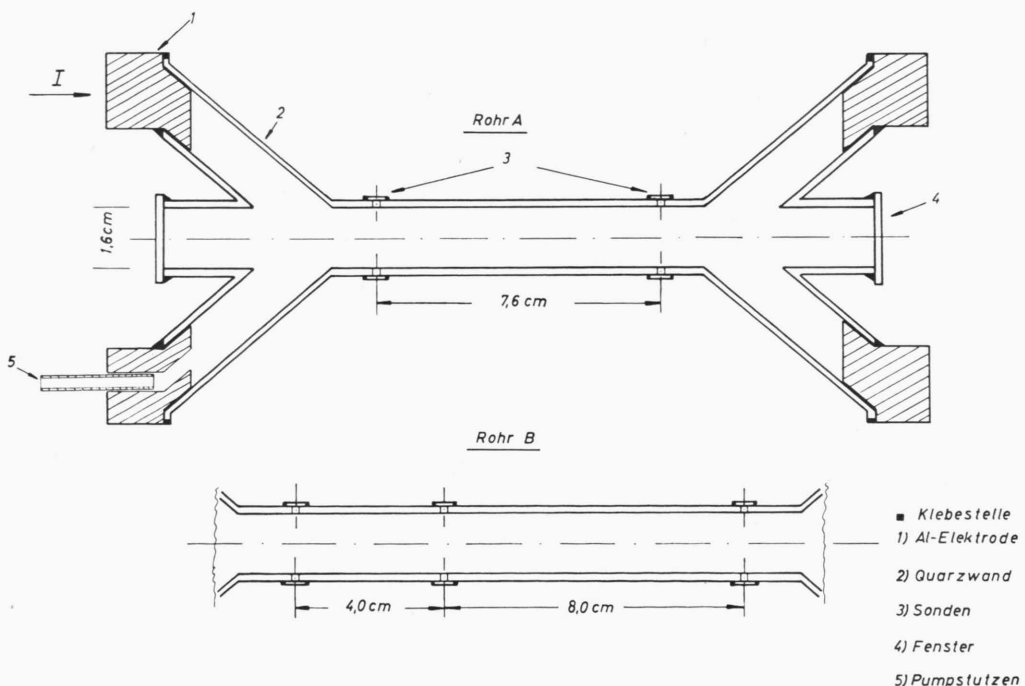


Abb. 1. Die Quarzteile sind so angeschliffen, daß sie möglichst gut an die Al-Elektroden passen. Die Sonden bestehen aus Wolfram-Band von 3 mm Dicke; sie sind direkt auf das Rohr geklebt.

* Abb. 3, 8, 10 und 12 auf Tafel S. 284 a.

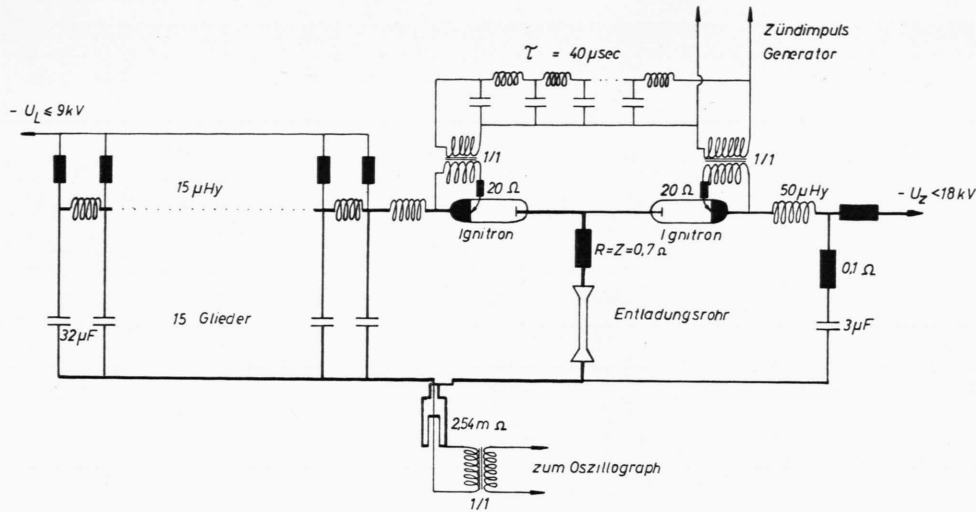


Abb. 2. Der Abschlußwiderstand der Kette von $0,7 \Omega$ hat eine sehr kleine Eigeninduktivität. Der Strom wird durch ein Koaxialkabel von 10 m Länge von der Kette zum Entladungsrohr geleitet.

Spannungen zu vermeiden, wurde der Meßwiderstand koaxial ausgebildet. Die Meßanordnung wurde geeicht. Die relative Meßgenauigkeit war kleiner als 2%. Die Zeitkonstante war kleiner als $2 \mu\text{s}$, so daß Stromschwankungen mit Perioden $> 1 \mu\text{s}$ noch nachgewiesen werden konnten.

Zur Bestimmung der Leitfähigkeit werden später nur die Potentialdifferenzen im homogenen zylindrischen Teil der Entladung herangezogen. Diese ergeben sich durch Subtraktion der gemessenen Spannungen zwischen den Sonden 1, 2 oder 3 und der geerdeten Elektrode (Abb. 4 und 5). Vorversuche hatten gezeigt,

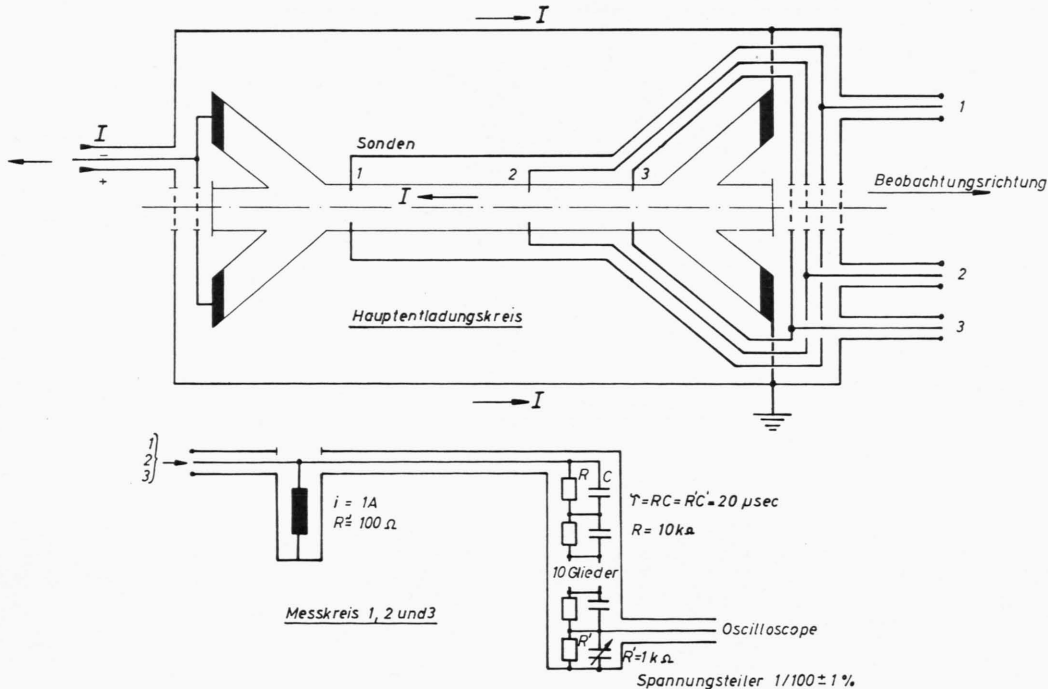


Abb. 4. Spannungsmessung. Die Gegeninduktivität zwischen Hauptstrom und Sondenkreis ist so klein wie möglich gehalten. Die ganze Anlage ist nur an einem Punkt geerdet, um Fehler durch Verzweigung des Rückstromes in die Erdleitung zu vermeiden. Die Spannungsteiler bestehen aus ausgewählten Widerständen und Kapazitäten.

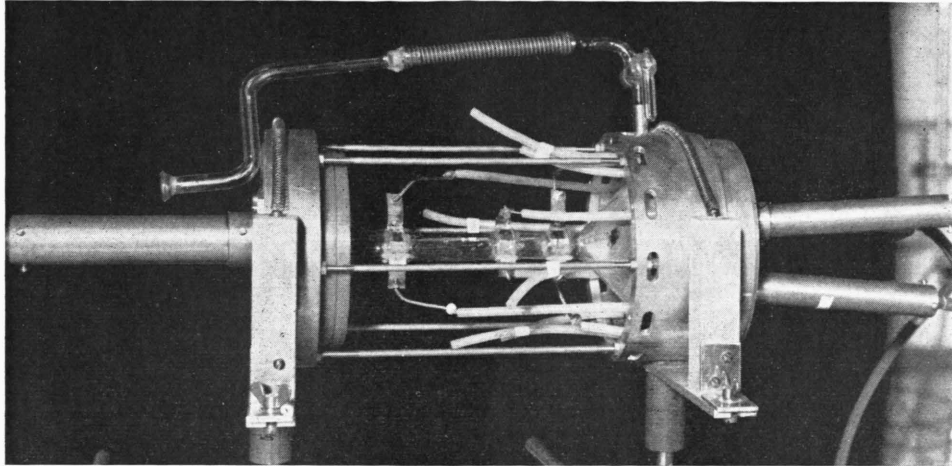


Abb. 5. Anordnung für die Spannungsmessung. Der Stromleiter ist coaxial angeordnet. Der Sondenkreis ist so weit wie möglich rotationssymmetrisch zur Rohrachse ausgebildet. Die Öffnungen im mechanischen Aufbau für die end-on Beobachtung waren so weit, daß die Beobachtung der Entladung nicht gestört wurde.

daß sich diese Spannung verringert, wenn im Sondenkreis — vom Plasmastrom abgezweigt — ein Strom fließt (Abb. 6). Das ist auf eine Verringerung des Potentialabfalls an der Sondenoberfläche zurückzuführen. Bei 0,6 A erreichte die Sondenspannung einen Grenzwert. Es wurde bei 1 A Sondenstrom gemessen. Alle Sonden hatten gleiche Oberflächen. Der Sondenabstand war einmal 76 mm bei einer Länge des Zylinderteils von 100 mm (später als Rohr A bezeichnet) und beim zweiten Rohr 120 mm bei 150 mm langem Zylinderteil (Rohr B). Das Rohr B hatte noch eine dritte Sonde, die 40 mm weit von der Anodensonde und 80 mm von der Kathodenode entfernt war (siehe Abb. 1 und 4).

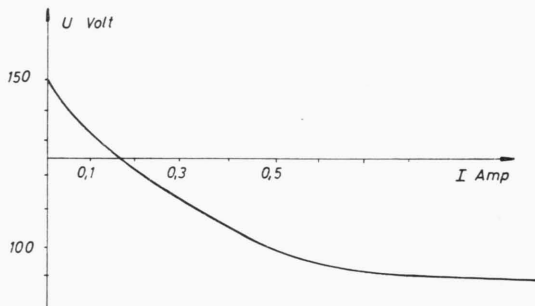


Abb. 6. Sondenspannung in Abhängigkeit vom Sondenstrom.

Der Sondenkreis wurde so angeordnet, daß die Gegeninduktion zwischen Meßkreis und dem Stromkreis der Plasmaentladung möglichst gering war. In einem Modellversuch — das Plasma wurde durch Kupferdrähte simuliert — ergab sich für die Gegeninduktivität weniger als $0,2 \mu\text{H}$. Da die Stromänderung di/dt stets unter 10^7 A/s lag, kann der gemessene Spannungsabfall von der Größenordnung 100 Volt nicht durch Induktion verfälscht worden sein. Die Zeitkonstante der Meßanord-

nung beträgt etwa $4 \mu\text{s}$. Sie ist hauptsächlich durch den Spannungsteiler (siehe Abb. 4) bedingt.

c) Optische Messungen

Zunächst soll an Hand der Abb. 7 die optische Anordnung beschrieben werden, mit der die Stationarität der Entladung nachgewiesen wurde. Am Ort des Zwischenbildes der Entladung befindet sich eine Drehscheibe. Diese weist einen schrägen Schlitz auf, durch den nacheinander alle Punkte des Eingangsspalt am Spektrographen beleuchtet werden. Bei einer Rotationsfrequenz von 24 Hz beträgt die Laufgeschwindigkeit des beleuchteten Punktes etwa $0,01 \text{ mm}/\mu\text{s}$ (Abb. 8). Die Zeitauflösung wird, außer durch die Rotationsfrequenz, durch die Breite des rotierenden Spaltes begrenzt und beträgt hier $45 \mu\text{s}$, was etwa $0,5 \text{ mm}$ im Spektrum entspricht.

Der Strahlengang ist so beschaffen, daß nur aus einem so beschränkten Bereich der Entladung Licht in den Spektrographen gelangen kann, daß man das Plasma in diesem Bereich als homogen ansehen darf. Die sehr temperaturempfindliche He II-Linie 4685 \AA (s. S. 289) zeigt dann, daß die Schwankungen der Temperatur während einer Zeit von mehr als $0,4 \text{ ms}$ weniger als 10% betragen. Die Zeitunabhängigkeit der Verbreiterung der He I-Linien erlaubt weiterhin den Schluß, daß die Elektronendichte sich während der Entladung nicht wesentlich ändert.

Die Homogenität im Zylinderteil des Entladungsröhres wurde folgendermaßen geprüft: Das Entladungsröhr wurde parallel zum Spektrographenspalt (verkleinert) auf die Spaltebene abgebildet und die Spaltkappe entfernt, so daß auf der Photoplatte Spektralbilder des Entladungsröhres entstehen (Abb. 9). Solche Bild-Spektrogramme zeigt Abb. 10. Sie wurden zu verschiedenen Zeiten der Entladung mit einer Belichtungszeit von $0,1 \text{ ms}$ aufgenommen.

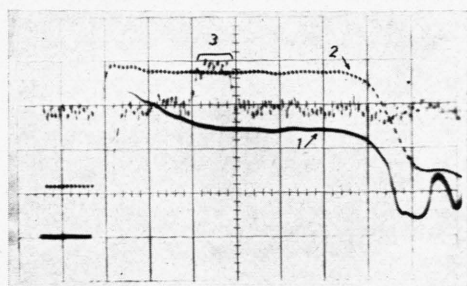


Abb. 3. Oszillogramm. 1 Sondenspannung 50 V/Einheit; 2 Entladungsstrom 1 kA/Einheit; 3 Zeitintervall der Spektralaufnahme.

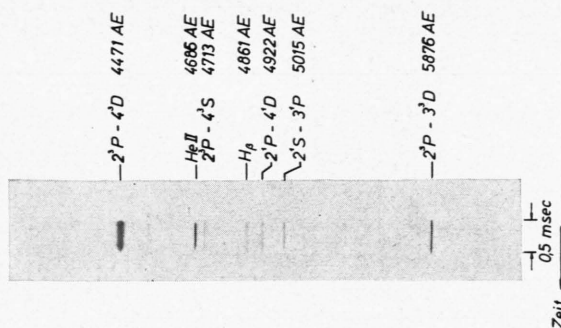


Abb. 8. Zeitaufgelöstes He-Spektrum. Das Spektrum ist mit einem Steinheil-3-Prismen-Spektrographen aufgenommen. Der Strom betrug 1,8 kA. Die Konstanz der Intensität der He II-Linie zeigt, daß die Temperatur während 0,4 ms um weniger als $\pm 10\%$ schwankt.

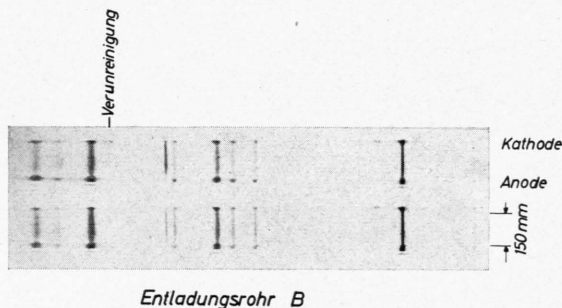
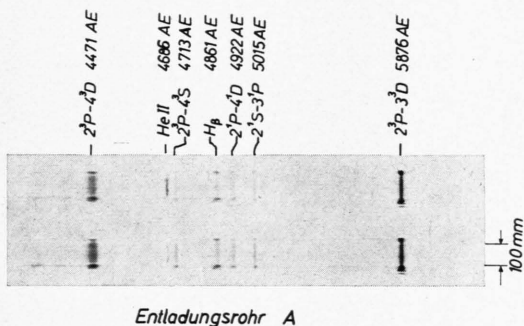
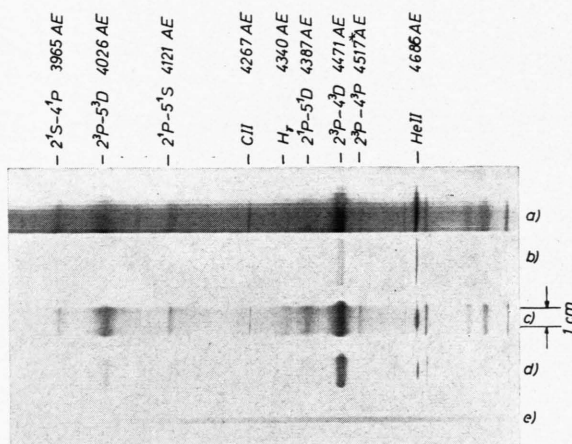


Abb. 10. Bildspektrogramme. Die Bildspektrogramme wurden für beide Röhre jeweils mit einem Strom von 2,1 kA und von 2,9 kA 0,2 ms nach Beginn der Entladung aufgenommen. Die Elektronendichte ist hier im Rohr A doppelt so groß wie im Rohr B. Bemerkenswert sind die Verunreinigungen im Trichter des Rohres B, die nicht in den zylindrischen Teil der Entladung eindringen.

Abb. 12. Raumauflösung. Die He-Aufnahmen wurden mit 20 Torr Anfangsdruck und einem Strom von 2,9 kA gemacht. Die Spektren c und d wurden mit verschiedenen Graufiltern aufgenommen. Die Verunreinigungen sind CII, CIII, NII und NIII Linien. Das Spektrum des Kohlebogenkraters wurde unter denselben Bedingungen, aber ohne Graufilter aufgenommen. a) Stufenfilter, b) Kontrolle der gleichmäßigen Ausleuchtung, c), d) Raumaufgelöste Spektren mit verschiedenen Graufiltern; e) Kohlebogenkrater zur Absolutmessung der Linienintensitäten.



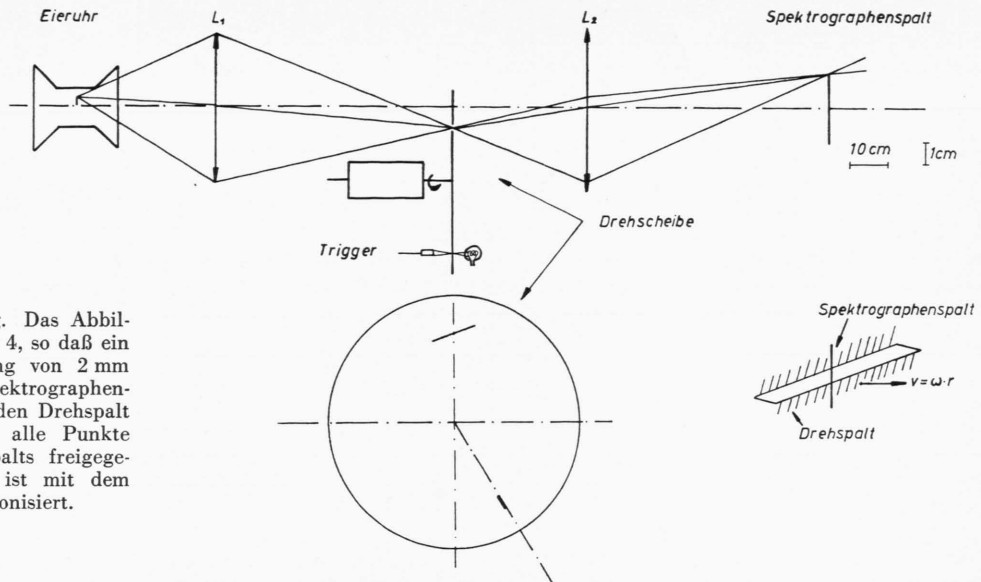


Abb. 7. Zeitauflösung. Das Abbildungsverhältnis ist 1 : 4, so daß ein Bereich der Entladung von 2 mm den ausnutzbaren Spektrographenspalt bedeckt. Durch den Drehschalt werden nacheinander alle Punkte des Spektrographenspalts freigegeben. Die Entladung ist mit dem Drehschalt synchronisiert.

Die spektrale Verbreiterung einiger schmaler He I-Linien ist so klein, daß das geometrische Bild des Rohrdurchmessers viel größer als die Linienbreite ist. Die Bilder im Licht dieser Linien stellen daher ein stigmatisches Abbild der geometrischen Anordnung des Plasmas im Entladungsrohr dar.

Es zeigt sich, daß die Entladung im Rohr B (Länge = 150 mm) rotationssymmetrisch ist, aber einen schwachen Gradienten der He I- und demgegenüber verstärkt

der He II-Strahlung, in Achsenrichtung aufweist. Dagegen ist in Rohr A (Länge = 100 mm) eine von der Rotationssymmetrie abweichende „Struktur“, aber kein Gradient in Achsenrichtung erkennbar (Abb. 10).

Zusammen mit dem Strahlungsgradienten in Achsenrichtung konnte ein Gradient der Leitfähigkeit festgestellt werden, und zwar in dem — zu erwartenden — Sinne, daß die Leitfähigkeit abnahm mit der Erniedrigung des Intensitätsverhältnisses der He II- und He I-

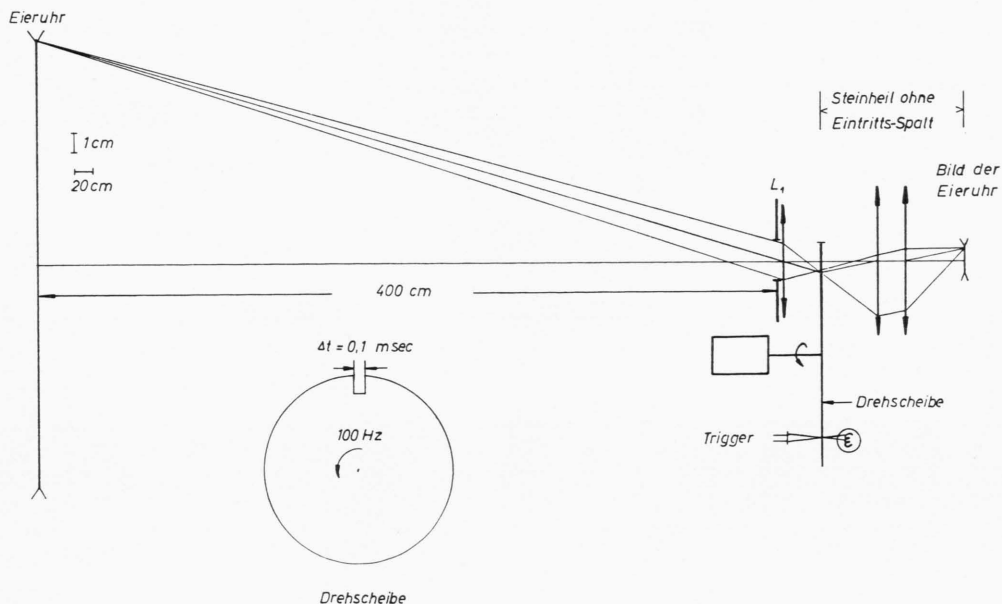


Abb. 9. Bildspektrogramm-Anordnung. Die geometrische Kontur der Entladung erscheint im Lichte jeder Spektrallinie. Die Drehscheibe öffnet den Spektrographen 0,1 ms nach einer wählbaren Verzögerungszeit gegenüber dem Beginn der Entladung.

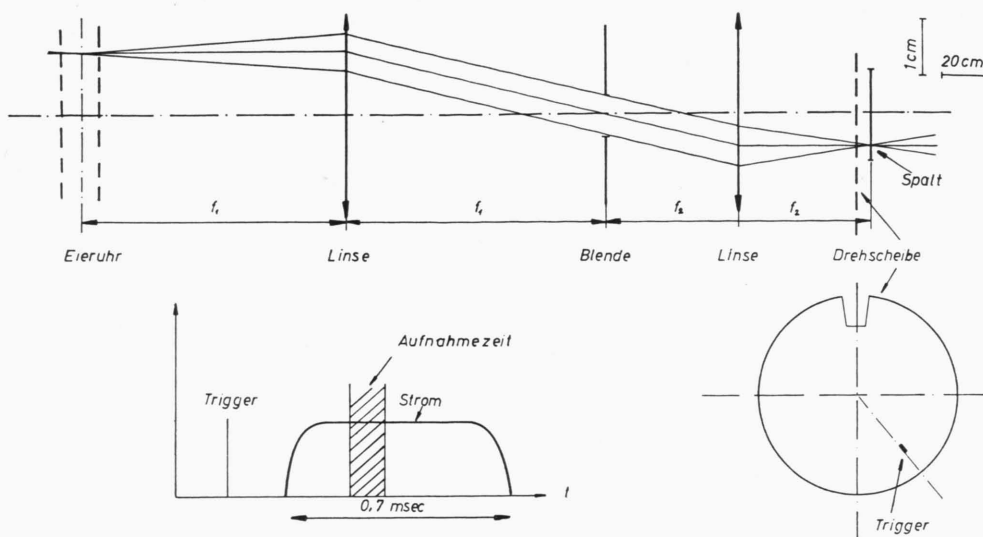


Abb. 11. Räumliche Auflösung. Durch die Abbildung werden achsenparallele Zonen der Entladung kleinen Abschnitten des Spektrographenspaltes eindeutig zugeordnet. Die praktische Auflösung beträgt 0,5 bis 1 mm. Die Drehscheibe triggert die Entladung und gibt dann den Spektrographen für 0,1 ms frei.

Strahlung, d. h. der Erniedrigung der Anregungstemperatur. Der Temperaturanstieg verlief stets vom anodenseitigen zum kathodenseitigen Ende der Entladung und war, wie gesagt — wenn überhaupt erkennbar — sehr schwach.

Gleichzeitig mit der im Rohr A auftretenden Struktur wurde beobachtet, daß der Temperaturgradient in radialer Richtung merklich flacher ist als im Rohr B. Dies wird in dem Kapitel näher beschrieben, das sich mit der Energieabgabe des Plasmas befaßt.

An Hand der bisher durchgeführten Experimente dürften die Strukturen wohl nicht zu erklären sein. Optische Inhomogenitäten der Quarzwand erklären sie nur teilweise. Auch durch Instabilitäten gleich welcher Art dürfte das Phänomen schwerlich zu erklären sein, da die Strukturen mehrere 100 μ s unverändert bleiben.

Kurzzeitige Schwankungen der Plasmakonfiguration konnten nicht festgestellt werden. Bildwandlernaufnahmen³ der Entladung von 0,1 μ s Öffnungszeit zeigten ähnliche Strukturen wie die Aufnahmen von 100 μ s Dauer.

Als letztes soll an Hand der Abb. 11 die Anordnung beschrieben werden, mit der der *radiale Temperaturverlauf* bestimmt wurde. Es wurde end-on durch den zylindrischen Teil der Entladung beobachtet.

Die in der gemeinsamen Brennebene der beiden Linsen befindliche Blende gewährleistet, daß bei verschwindender Blendenöffnung achsenparallele Strahlen der Entladung den Punkten des Spektrographenspaltes eindeutig zugeordnet sind. Es wird also eine punktweise radiale Auflösung erreicht (Abb. 12). Die endliche Blendenöffnung verursacht das endliche Auflösungsver-

mögen. Es wurde — je nach Intensität der Strahlung — mit einer Auflösung von 0,5 bis 1,0 mm gearbeitet. Die Aufnahmezeit wurde mit einer Drehscheibe auf 0,1 ms begrenzt.

Die Konstanz der Zeitdifferenz zwischen Beginn der Entladung und der Spektrographenaufnahme wurde bei allen Aufnahmen geprüft. Dieses geschah so, daß der Entladungsstrom zusammen mit dem Licht der Entladung — im Spektrographen mit einer Photozelle aufgenommen — auf einem Oszillographen registriert wurde (Abb. 3).

Bei diesen Aufnahmen wurden noch gleichzeitig Absolutmessungen durchgeführt. Die Gesamtintensität der He I-Linie $\lambda = 4713 \text{ \AA}$ wurde mit einem Normalstrahler (siehe Seite 290) verglichen. Durch einen Umlenkspiegel wurde Gleichheit der Strahlengänge für beide Lichtquellen erreicht.

II. Gleichgewicht und Temperatur

Den Auswertungen der Meßergebnisse werden stets die Formeln des thermodynamischen Gleichgewichts zugrunde gelegt. Diesen Vorgang legt die Erfahrung der experimentellen Bogenphysik nahe. Die Rechtfertigung dafür ergibt sich nachträglich aus der Konsistenz der erhaltenen Resultate.

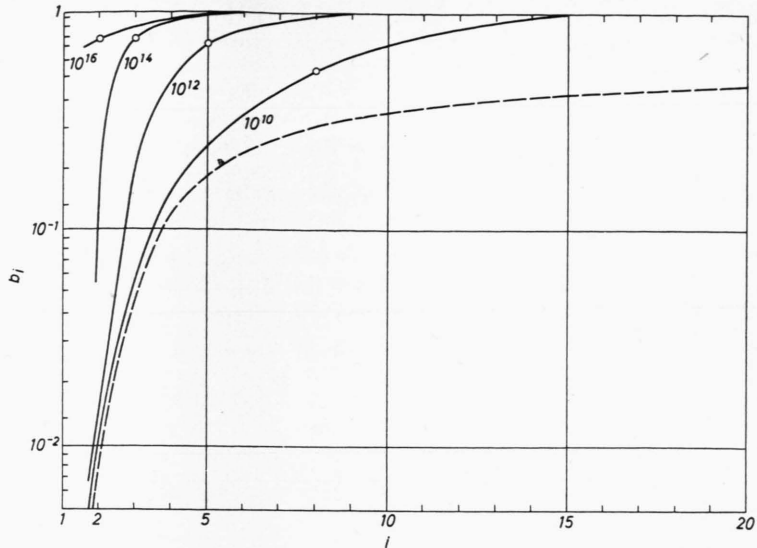
In welche Richtung und von welcher Größenordnung Abweichungen von der Besetzung bei thermischem Gleichgewicht zu erwarten sind, kann an Hand einiger neuerer Arbeiten erläutert werden, die alle die Anregungs- und Ionisationsverhältnisse in einem *optisch dünnen* Plasma zum Gegenstand haben. Die einer Ar-

³ Diese Aufnahmen wurden von O. KLÜBER gemacht. Ich habe ihm für die Überlassung der Ergebnisse zu danken.

Abb. 13. Besetzung der angeregten Zustände von Wasserstoff. Das Bild zeigt, nach McWHIRTER⁴, das Verhältnis

$$b = \frac{\text{Gerechnete Besetzung im Zustand } i}{\text{Besetzung nach SAHA im Zustand } i}$$

in Abhängigkeit von der Hauptquantenzahl i für verschiedene Elektronendichten bei einer Temperatur von 11 600 °K.



beit von McWHIRTER⁴ entnommene Abb. 13 zeigt, wie die Besetzung diskreter angeregter Zustände von Wasserstoff (für He liegen keine Rechnungen vor) bei einer Elektronentemperatur von 11 600 °K (1 eV) und Elektronendichten von 10^{10} bis 10^{16} cm⁻³ von der thermodynamischen Gleichgewichtsbesetzung abweicht.

Für Elektronendichten $> 10^{16}$ cm⁻³ ist der Unterschied auch für den niedrigsten Anregungszustand $i=2$ zu vernachlässigen. Die Begründung dafür liegt in dem Umstand, daß auch im Hohlraum das Gleichgewicht zwischen den dicht unterhalb der Ionisationsgrenze liegenden diskreten Zuständen und den kontinuierlichen Zuständen oberhalb dieser Grenze praktisch durch Stöße allein, also nicht durch Strahlungsprozesse geregelt wird. Das Fehlen der Hohlraumstrahlung, das — wie gesagt — in den genannten Arbeiten immer vorausgesetzt wird, kann daher keinen Einfluß mehr auf die Besetzung der Zustände haben. Analoge Verhältnisse müssen für die diskreten Zustände des einfach ionisierten Heliums und die des neutralen Heliums angenommen werden.

Die Abweichung der Besetzungen des Grundzustandes von der thermodynamischen Gleichgewichtsbesetzung in Abhängigkeit von der Elektronendichte bei $T=32\,000$ °K entnimmt man der Abb. 14, der Daten zugrunde liegen, die sich in der Arbeit von BATES, KINGSTON und McWHIRTER finden⁵.

Die Gerade kennzeichnet die Gleichgewichtsbesetzung nach SAHA. Sie wird bei hohen Dichten — wie man sieht — auch bei fehlender Hohlraumstrahlung eingenommen. Für kleine Dichten nähert sie sich der Besetzung, wie sie von der Corona-Formel vorgeschrieben wird. Im Bereich der untersuchten Elektronendichten von 10^{17} bis $2 \cdot 10^{16}$ cm⁻³ erhöht sich die Besetzung des Grundzustandes gegenüber der SAHA-Besetzung um

einen Faktor 1,4 bzw. 2,7. Für den Grundzustand des neutralen Heliums müssen — wegen der gegenüber Wasserstoff höheren Ionisationsenergie — etwas größere Abweichungen erwartet werden. Diese Abweichungen werden aber für den Fall des hier untersuchten Plasmas deswegen geringer sein, weil — wie im Anhang I berechnet wurde — die Linie $\lambda = 584$ Å (2^1P-1^1S) schon bei SAHA-Besetzung und also erst recht bei Abweichungen von der SAHA-Besetzung nicht mehr optisch dünn ist. Das würde bei großer Abweichung von der SAHA-Besetzung auch für höhere Serienglieder gelten. Es ist evident, daß durch den teilweisen Wiedereintritt der Hohlraumstrahlung im Frequenz-

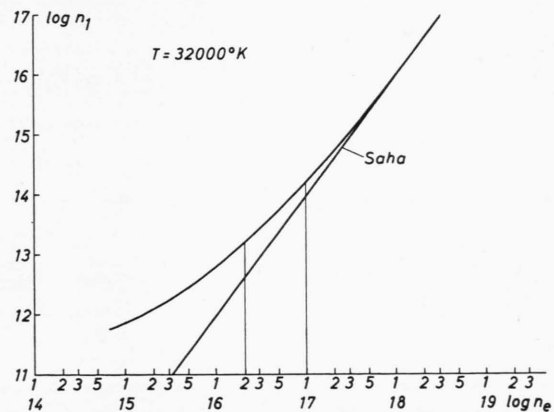


Abb. 14. Besetzung des Grundzustandes von Wasserstoff. Die Besetzung ist nach⁵ als Funktion der Elektronendichte aufgetragen. Das Verhältnis dieser Besetzung zur Besetzung nach SAHA ist im Bereich von 25 000 — 60 000 °K praktisch temperaturunabhängig.

⁴ R. W. P. McWHIRTER, Nature, Lond. **190**, 902 [1961].

⁵ D. R. BATES, A. E. KINGSTON u. R. W. P. McWHIRTER, Culham Laboratory. CLM P3 1961.

bereich dieser Linien die Abweichungen zum Teil rückgängig gemacht werden, da ihr Fehlen sie ja verursacht hatte.

Im folgenden ist sowohl bei der Behandlung der elektrischen Leitfähigkeit (Teil 3) wie der Wärmeleitfähigkeit (Teil 4) die Wirkung der neutralen Heliumteilchen im Grundzustand nicht berücksichtigt worden. Das wäre dann nicht mehr gerechtfertigt, wenn die Anzahl der Neutralteilchen etwa um 2 Zehnerpotenzen größer wäre als nach der SAHA-Gleichung berechnet, wonach $n_1/n^+ < 10^{-2}$ ist. Das ist aber auf gar keinen Fall zu erwarten.

Für die zweite Ionisationsstufe des Heliums liegen die Verhältnisse ganz ähnlich; aus Abb. 15 entnimmt man das Verhältnis der Anzahl der einfach ionisierten He-Teilchen im Grundzustand zu der aller zweifach ionisierten Teilchen wiederum bei $T = 32\,000^\circ\text{K}$ ⁵. Dieses Verhältnis weicht bei $n = 10^{17}\text{ cm}^{-3}$ um einen Faktor 10, bei $n_e = 2 \cdot 10^{16}\text{ cm}^{-3}$ um einen Faktor 100 von

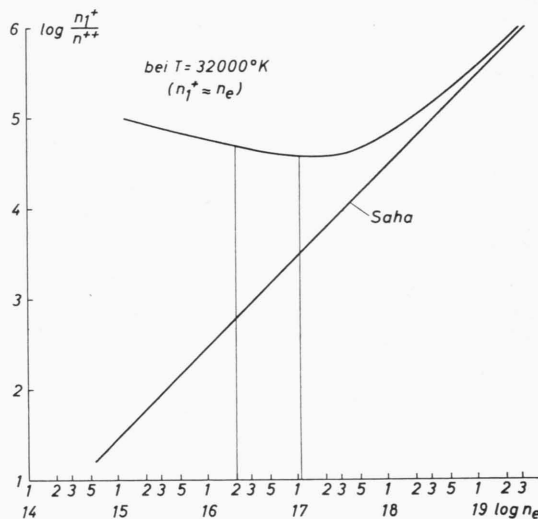


Abb. 15. Besetzung des Grundzustandes von ionisiertem Helium. Das Diagramm zeigt nach ⁵ das Verhältnis Besetzungsdichte des Grundzustandes von He II Dichte des zweifach ionisierten Heliums

der SAHA-Besetzung ab. Wie man weiterhin der Abb. 15 entnimmt, gilt praktisch immer $n_1^+ = n_e$, so daß man sagen kann, n^{++} ist gegenüber der SAHA-Besetzung um einen Faktor 10 bzw. 100 zu klein. Das gilt dann — wie oben erläutert (Abb. 13) — näherungsweise auch für die diskreten angeregten Zustände des einfach ionisierten Heliums. Nun sind aber — wie berechnet wurde (Anhang I) — die ersten 3 Linien des ionisierten Heliums optisch dick, wodurch entgegen der Voraussetzung der Rechnungen wiederum eine enge Kopplung

der diskreten Zustände und daher der durch Stoßprozesse damit zusammenhängenden kontinuierlichen Zustände (n^{++}) an den Grundzustand bewirkt wird. Die Abweichungen um den Faktor 10 bzw. 100 dürften daher unter den im Experiment vorliegenden Verhältnissen wesentlich reduziert sein. Ein experimenteller Anhaltspunkt dafür ergibt sich aus der Bestimmung der (Anregungs-)Temperatur aus dem Intensitätsverhältnis der He II-Linie $\lambda = 4686\text{ Å}$ (4–2) und der He I-Linie $\lambda = 4713\text{ Å}$ (4³S–2³P). Nach den obigen Darlegungen — siehe Abb. 13 — ist dieses Verhältnis dem Verhältnis n^{++}/n_1^+ in etwa proportional. Wäre dieses Verhältnis nun um den besagten Faktor 10 bis 100 kleiner als im Falle des thermodynamischen Gleichgewichts, so müßte die unter Zugrundelegung der Zusammenhänge bei thermodynamischem Gleichgewicht — des BOLTZMANN-Faktors und der SAHA-Gleichung — ermittelte Anregungstemperatur um 20 bis 30% kleiner sein als die Elektronentemperatur. Diese sollte sich aber von der DOPPLER-Temperatur wiederum nicht unterscheiden (siehe dazu FINKELNBURG und MAECKER⁶). Die ermittelte Anregungstemperatur ist bei Elektronendichten $n_e < 3 \cdot 10^{16}\text{ cm}^{-3}$ um 6% kleiner als die DOPPLER-Temperatur. Diese Abweichung liegt aber schon innerhalb der Fehlergrenze der DOPPLER-Temperatur allein.

Bevor darauf eingegangen wird, sollen noch einige andere für das Plasma charakteristische Angaben gemacht werden. Die Stoßfrequenz für 90°-Stoß für Elektronen untereinander (reziproke „self-collision time“) beträgt nach SPITZER⁷, S. 78, bei einer Temperatur von $3 \cdot 10^4^\circ\text{K}$ und einer Elektronendichte von $3 \cdot 10^{16}\text{ cm}^{-3}$ $\nu = \frac{1}{2} \cdot 10^{12}\text{ sec}^{-1}$, einer freien Weglänge von $7 \cdot 10^{-4}\text{ cm}$ entsprechend. Die zugeführte elektrische Energie wird demgegenüber mit einer Frequenz umgesetzt, die durch

$$\nu' = \frac{Ej}{(\frac{3}{2}kT + \chi_{\text{Ion}}^I)n_e}$$

abgeschätzt werden kann. (Ej) ist die pro Volumen- und Zeiteinheit zugeführte elektrische Energie, $(\frac{3}{2}kT + \chi_{\text{Ion}}^I)n_e$ (mit χ_{Ion}^I = Ionisationsenergie des neutralen Heliums) sei der Energieinhalt der Volumeneinheit. Es ergibt sich $3 \cdot 10^4 < \nu' < 10^5\text{ sec}^{-1}$.

Jetzt soll die Bestimmung der Temperatur und der Elektronendichte vorgenommen werden.

a) Doppler-Temperatur

Die Linien $\lambda = 4649\text{ Å}$ (1) und $\lambda = 4705\text{ Å}$ (25) zweier O II Multipletts (die in Klammern stehenden Zahlen geben die Nummern der Multipletts nach MOORE⁸ an) zeigten bei Elektronendichten $< 3 \cdot 10^{16}\text{ cm}^{-3}$ reine DOPPLER-(GAUSS-)Profile.

Es wurde mit einem Zeiß-Jena-Plangitter-Spektrographen in der 4. Ordnung gemessen. Die

⁶ W. FINKELNBURG u. H. MAECKER, Handbuch der Physik Bd. XXII, Verlag Springer, Berlin 1956.

⁷ L. SPITZER, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers Inc., London 1956.

⁸ C. E. MOORE, A Multiplet Table of Astrophysical Interest 1945, Princeton, University Observatory, No. 20.

gemessenen DOPPLER-Profile hatten Halbwertsbreiten von $\sim 0,2 \text{ \AA}$. Das Apparateprofil war kleiner als $0,05 \text{ \AA}$.

b) Anregungstemperaturen

Die Temperaturen wurden bestimmt aus dem Intensitätsverhältnis V der He II-Linie $\lambda = 4686 \text{ \AA}$ ($4-3$) und der He I-Linie $\lambda = 4713 \text{ \AA}$ (4^3S-2^3P):

$$V = \frac{\int_{\text{Linie}} I_{\nu}^{\text{He II}} d\nu}{\int_{\text{Linie}} I_{\nu}^{\text{He I}} d\nu} = \frac{\nu^{\text{II}} A_{43}^{\text{II}} n_4^{\text{II}}}{\nu^{\text{I}} A_{42}^{\text{I}} n_4^{\text{I}}},$$

woraus nach Einführung des BOLTZMANN-Faktors und der SAHA-Gleichung

$$V = \frac{\nu^{\text{II}} A_{43}^{\text{II}} g_4^{\text{II}}}{\nu^{\text{I}} A_{42}^{\text{I}} g_4^{\text{I}}} 2 \left(\frac{2 \pi m}{h^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{(k T)^{3/2}}{n_e} \exp \left\{ - \frac{(\chi_{\text{Ion}}^{\text{I}} - \chi_4^{\text{I}}) + \chi_4^{\text{II}}}{k T} \right\} \quad (1)$$

wird. In diesen Ausdrücken bedeuten außer den bekannten Größen m , h , k und T , ν die Linienfrequenzen, A Übergangswahrscheinlichkeiten, g statistische Gewichte, χ Anregungs- bzw. Ionisationsenergien, n Besetzungszahlen. Im einzelnen gilt

$$\begin{aligned} \nu^{\text{I}} &= 6,366 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1} (\lambda = 4713 \text{ \AA}); \\ g_4^{\text{I}} &= 3; \\ A_{42}^{\text{I}} &= 1,03 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} (\text{l. c.}^9); \\ \chi_{\text{Ion}}^{\text{I}} &= 24,5 \text{ eV}; \\ \chi_4^{\text{I}} &= 23,5 \text{ eV}; \\ \nu^{\text{II}} &= 6,404 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1} (\lambda = 4686 \text{ \AA}); \\ g_4^{\text{II}} &= 32; \\ A_{43}^{\text{II}} &= 1,43 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}; \\ \chi_4^{\text{II}} &= 51,7 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Die Abb. 16 gibt die Temperatur in Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses V und der Elektronendichte n_e wieder. Nach Gl. (1) sind alle im folgenden angeführten Temperaturen berechnet worden.

Aus denselben Spektralaufnahmen ($n_e \leq 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$), aus denen die DOPPLER-Temperatur von

$$T_{\text{DOPPLER}} = 33\,500 \text{ °K} \pm 10\%$$

bestimmt wurde, ergab sich als Anregungstemperatur nach Gl. (1)

$$T_A = 31\,500 \text{ °K} \pm 5\%.$$

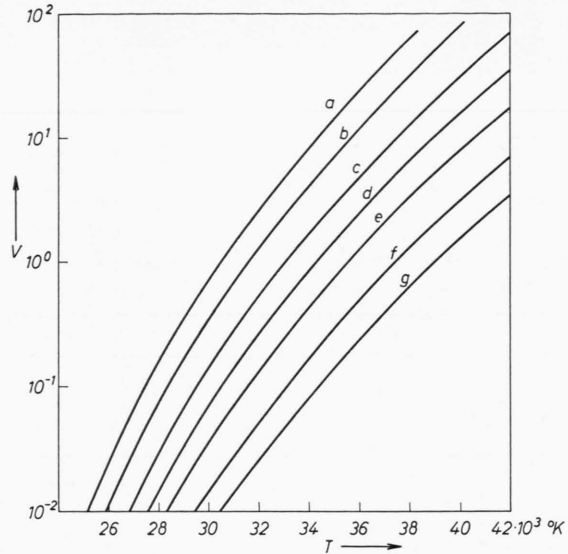


Abb. 16. Verhältnis der Strahlungsenergie der Linie He II $\lambda = 4686 \text{ \AA}$ zu He I $\lambda = 4713 \text{ \AA}$ in Abhängigkeit von Temperatur und Elektronendichte n_e .

Kurve	a	b	c	d	e	f	g
n_e	10^{16}	$2 \cdot 10^{16}$	$5 \cdot 10^{16}$	10^{17}	$2 \cdot 10^{17}$	$5 \cdot 10^{17}$	10^{18} cm^{-3}

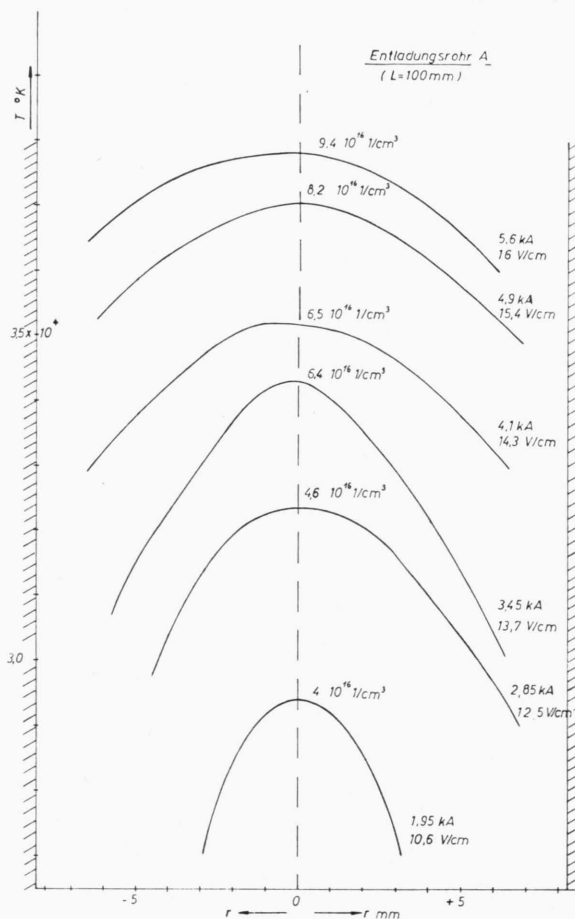
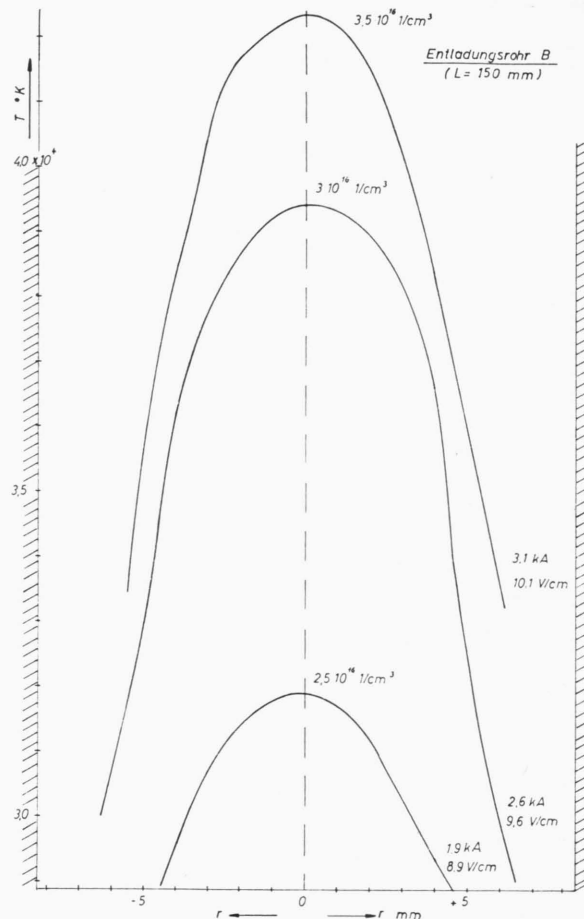
Innerhalb ihrer Fehlergrenzen sind also beide Temperaturen gleich. Der Mittelwert der Anregungstemperatur ist, wie schon gesagt, um 6% kleiner als der Mittelwert der DOPPLER-Temperatur. Nach den obigen Erörterungen der Abweichungen der Besetzungen von denen bei thermodynamischem Gleichgewicht ist eine Verfälschung der Temperatur in diese Richtung bei Anregungsmessungen tatsächlich zu erwarten. Es besteht daher eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß die 6% Abweichung einen wirklichen Grund hat. Bei höheren Elektronendichten sollte die Differenz zwischen DOPPLER- und Anregungstemperatur kleiner werden. Messungen der DOPPLER-Temperatur bei Elektronendichte $> 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ waren jedoch nicht möglich, da es keine Linien gab, deren Konturen nicht schon durch den STARK-Effekt der Mikrofelder mitbestimmt waren.

Die Abb. 17, 18, 19 geben den nach Gl. (1) bestimmten radialen Temperaturverlauf wieder, und zwar getrennt für das 100 mm und das 150 mm lange Entladungsrohr.

Das Intensitätsverhältnis V wurde mit einem Steinheil 3-Prismen-Spektralapparat GH in Normalausführung gemessen.

⁹ Die Werte der He I-Übergangswahrscheinlichkeiten sind stets der Arbeit von E. TREFFTZ et al.¹⁰ entnommen.

¹⁰ E. TREFFTZ, A. SCHLÜTER, K.-H. DETTMAR u. K. JÖRGENS, Z. Astrophys. 44, 1 [1957].

Abb. 17. Entladungsröhre A ($L=100$ mm).Abb. 18. Entladungsröhre B ($L=150$ mm).

c) Bestimmung der Elektronendichte mit Hilfe der Theorie der Linienverbreiterung

Die Bestimmung der Elektronendichte wurde im Anschluß an eine Arbeit von WULFF² vorgenommen. Dort ist gezeigt worden, daß sich die Elektronendichte übereinstimmend aus solchen Linien, die gemäß der Stoßdämpfungstheorie, und solchen, die gemäß der statistischen (quasistatistischen) Theorie verbreitert sind, bestimmen läßt. Bekanntlich können die Stoßdämpfungstheorie und die statistische Theorie als Grenzfälle einer allgemeinen Linienverbreiterungstheorie angesehen werden. Der Anschluß an die genannte Arbeit wurde aus meßtechnischen Gründen durch die Bestimmung der Linienkonturen der diffusen He I-Linie $\lambda = 4471 \text{ \AA}$ ($4^3\text{D} - 2^3\text{P}$) vorgenommen. Diese Linie verbreitert sich bei Elektronendichten, wie sie im Experiment vorkommen, ganz ähnlich wie die $\text{H}\beta$ -Linie, also gemäß der statisti-

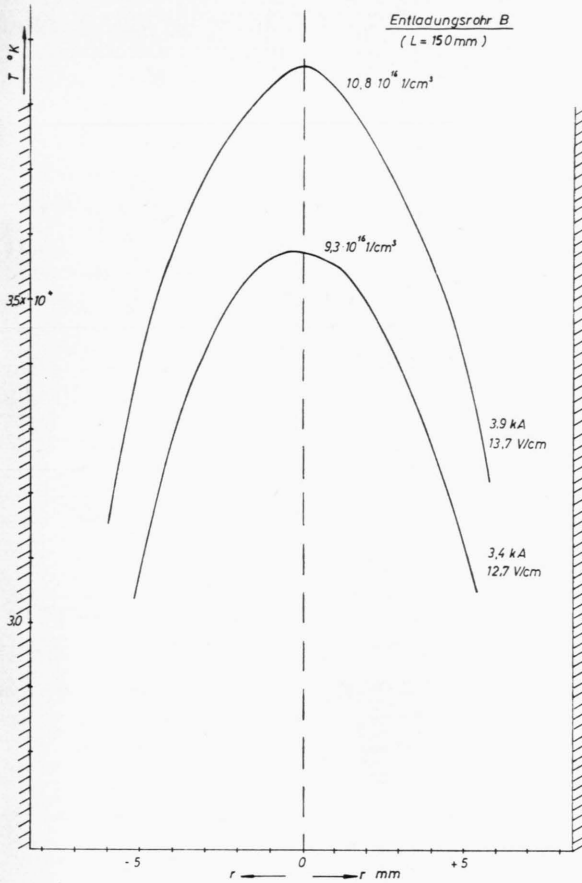
schen Theorie. Wegen der Begründung dafür und sonstiger Details muß auf die zitierte Arbeit verwiesen werden.

Die relativen Werte der so bestimmten Elektronendichten dürften nicht ungenauer als 20% sein. Für den Absolutwert der Elektronendichte muß aber vorsichtshalber zunächst ein Fehler von 70% zugelassen werden. Um diesen Fehler zu reduzieren, wurde noch eine Prüfmessung der Elektronendichte vorgenommen, die von der Theorie der Linienverbreiterung unabhängig ist.

d) Bestimmung der Elektronendichte aus der „Gesamtintensität“ einer He I-Linie

Die Gesamtintensität der He I-Linie $\lambda = 4713 \text{ \AA}$ aus optisch dünner Schicht ist gegeben durch

$$\int_{\text{Linie}, \omega} I_\nu d\nu \Delta\omega l = \text{const} \cdot n_e^2 T^{-3/2} \exp \left\{ \frac{\chi_{\text{Ion}} - \chi_A}{k T} \right\} \Delta\omega l. \quad (2)$$

Abb. 19. Entladungsrohr B ($L=150$ mm).

Darin bedeuten neben den schon erklärten Größen l Länge der strahlenden Schicht, $\Delta\omega$ ein durch die Abbildungsverhältnisse bestimmter mittlerer Raumwinkel. Diese Gesamtintensität wurde mit der eines von EULER¹¹ kalibrierten Normalstrahlers verglichen. Die so nach Gl. (2) bestimmten Elektronendichten¹² wichen von denen aus den Linienprofilen ermittelten nicht mehr als $\pm 25\%$ ab.

Die im folgenden angeführten Elektronendichten wurden aus den Linienprofilen der He I-Linie $\lambda = 4471 \text{ \AA}$, wie sie aus achsennahen Zonen emittiert wird, bestimmt. Der radiale Verlauf (geringe Zunahme mit wachsendem r) der Elektronendichte wurde hingegen — wenn nötig — aus der gemessenen Gesamtintensität nach Gl. (2) bestimmt.

III. Elektrischer Widerstand des Plasmas

Im folgenden wird der gemessene (spezifische) Widerstand der Entladung mit dem theoretischen Wert¹³

$$\eta = 3,80 \cdot 10^3 \frac{Z \ln \Lambda}{\gamma_E(z)} T^{-3/2} \quad \Omega \text{ cm} \quad (3)$$

verglichen, der von SPITZER⁷ angegeben wird. Hierin bedeuten T die Temperatur, Z die Ionenladungszahl und $\gamma_E(Z)$ ($\gamma_E(1) = 0,582$, $\gamma_E(2) = 0,683$, $\gamma_E(\infty) = 1$) einen Faktor, durch den die Wirkung von Stößen zwischen den Elektronen neben Elektron-Ion-Stößen berücksichtigt wird. Da die Anzahl der zweifach ionisierten Teilchen selbst bei der höchsten Temperatur von $42\,000^\circ\text{K}$ in der Mitte der Entladung kleiner als 20% der einfach geladenen Teilchen bleibt, wird im folgenden stets $Z=1$ und $\gamma_E(1) = 0,582$ gesetzt, woraus

$$\eta = 6,53 \cdot 10^3 \ln \Lambda \cdot T^{-3/2} = A T^{-3/2} \quad \Omega \text{ cm} \quad (3')$$

folgt. Λ ist das Verhältnis von DEBYE-Länge $h = [kT/(4\pi e^2 n_e)]^{1/2}$ zu „90°-Stoßparameter“ $p_0 = e^2/(3kT)$ und somit

$$\Lambda = \frac{3}{2e^3} \left(\frac{k^3 T^3}{\pi n_e} \right)^{1/2}.$$

Der Wert Λ hängt von der Lösung des bei der Berechnung der Diffusionskoeffizienten entstehenden Problems ab, bis zu welchem gegenseitigen Abstand die COULOMB-Wechselwirkung der Teilchen zu berücksichtigen ist. Es wäre z. B. der Fall denkbar, daß diese Wechselwirkung statt bis zum DEBYE-Abstand bis zum mittleren Teilchenabstand $n_e^{-1/3}$ wirksam ist¹⁴. In $\Lambda = h/p_0$ müßte dann h durch $n_e^{-1/3}$ ersetzt werden. Dadurch erniedrigte sich der Wert von $\ln \Lambda$, der im Bereich der erfaßten Temperaturen und Elektronendichten von 5 bis 6 variiert, um 12 bis 17%. Diese Abweichung ist — wie sich zeigen wird — zu klein, als daß sie vom Experiment sicher erfaßt werden könnte.

Es muß noch erwähnt werden, daß obige Gl. (3) unter der Voraussetzung abgeleitet wurde, daß die mittlere Driftgeschwindigkeit \bar{v} der Elektronen unter dem Einfluß des elektrischen Feldes klein ist gegenüber der mittleren thermischen Geschwindigkeit. Diese Bedingung ist stets erfüllt. Da nämlich die Strom-

senraum, bei äußerem elektrischem Feld. Wegen ihrer Ableitung und wegen aller im folgenden erwähnten theoretischen Details muß auf⁷ verwiesen werden. Dort ist auch die Originalliteratur zitiert.

¹⁴ Näheres darüber findet sich auch bei UNSÖLD¹⁵, S. 596.

¹¹ J. EULER, Ann. Phys., Lpz. (6) 11, 204 [1953].

¹² Für die Überlassung genauer Meßresultate danke ich Herrn K. BERGSTEDT.

¹³ Diese Gleichung wurde gewonnen durch Lösung der BOLTZMANN-Gleichung für $f(r, v)$, die Elektronendichte im Pha-

dichte rund 1000 A cm^{-2} und die kleinste Elektronendichte $2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ betrug, gilt

$$n_e e \bar{v} = 2 \cdot 10^{16} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \bar{v} = 1000 \text{ A cm}^{-2}$$

und somit für den größten Wert der Driftgeschwindigkeit $\bar{v} = 4 \cdot 10^5 \text{ cm/s} \ll \sqrt{3 k T / m} \approx 10^8 \text{ cm/s}$.

Es ist zweckmäßig, den Vergleich zwischen Experiment und Theorie durch Vergleich des experimentell und theoretisch gewonnenen Wertes

$$A = 6,53 \cdot 10^3 \ln A = \eta T^{3/2} \quad \Omega \text{ cm } (^{\circ}\text{K})^{3/2}$$

durchzuführen. Dieser Wert hängt nach Gl. (3) nur sehr schwach von Temperatur und Elektronendichte ab. Um die Meßwerte auf diese Größe reduzieren zu können, wird stets Zylindersymmetrie des Entladungskanals vorausgesetzt. Die in Teil I beschriebenen Abweichungen von der Zylindersymmetrie werden dann an Hand der so gefundenen Meßgrößen A diskutiert.

Durch jeden Querschnitt F des Zylinders mit dem Radius ϱ fließt der Gesamtstrom

$$I = U \frac{1}{\Delta l} \int_{r=0}^{\varrho} \frac{1}{\eta(r)} dF = U \frac{2\pi}{\Delta l A} \int_0^{\varrho} T(r)^{3/2} r dr.$$

U ist die zwischen zwei Sonden mit dem Abstand Δl gemessene Spannung.

Es ist nun für die Auswertung der Meßergebnisse weiterhin zweckmäßig, diesen Ausdruck umzuformen in

$$I = U \frac{\pi \varrho^2}{\Delta l A [T(0)]^{-3/2}} 2 \int_0^{\varrho} \left(\frac{T(r)}{T(0)} \right)^{3/2} \frac{r dr}{\varrho^2}. \quad (4)$$

$T(0)$ ist die (maximale) Temperatur in der Rohrmitte, ϱ der Rohrradius. Der Faktor

$$Q(\varrho) = 2 \int_0^{\varrho} \left(\frac{T(r)}{T(0)} \right)^{3/2} \frac{r dr}{\varrho^2}$$

wird aus der graphischen Darstellung der Abb. 20 gewonnen. Seine Werte liegen zwischen 1 (Rechteckprofil der Temperatur) und etwa 0,5. Aus den vorstehenden Gleichungen ergibt sich

$$A_{\text{exp}} = \frac{U}{I} \frac{\pi \varrho^2}{\Delta l} [T(0)]^{3/2} Q(\varrho). \quad (5)$$

Die mit den Meßdaten nach dieser Gleichung berechneten Werte finden sich in der Spalte 5 der Tab. 1. In Spalte 6 ist der Wert $A_{\text{th}} = 6,53 \cdot 10^3 \ln A$ eingetragen. Die zur Berechnung von $\ln A$ verwendeten Werte von Temperatur und Elektronendichte

stehen in den Spalten 2 und 4. Die über den Rohrquerschnitt gemittelten Temperaturen der Spalte 2 sind — wegen der Definition von Q — durch $T^{3/2} = Q[T(0)]^{3/2}$ gegeben. In Spalte 7 ist die Abweichung $\Delta A = A_{\text{exp}} - A_{\text{th}}$, in Spalte 8 die Abweichung $\Delta A' = A_{\text{exp}} - A_{\text{exp}}$ jeweils für ein bestimmtes A_{th} eingetragen. Für die durchschnittliche Abweichung des experimentellen A -Wertes vom theoretischen ergibt sich

$$\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \frac{A_{\text{exp}} - A_{\text{th}}}{A_{\text{th}}} = 3,6\%.$$

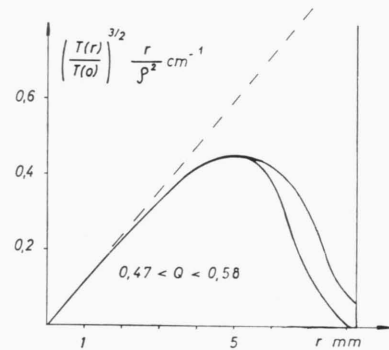


Abb. 20. Zur graphischen Bestimmung des Koeffizienten

$$Q(\varrho) = 2 \int_0^{\varrho} \left(\frac{T(r)}{T(0)} \right)^{3/2} \frac{r dr}{\varrho^2}$$

ist dessen Integrand gegen r aufgetragen. Der Kurvenverlauf wurde für $r > 0,6$ cm extrapoliert. Die beiden Kurven für $r \geq 0,5$ cm umfassen den Bereich möglicher Extrapolationsfehler.

Für das 100 mm lange A-Rohr alleine beträgt der Wert $+8,6\%$, für das 150 mm lange B-Rohr (ohne die durch Kreuze gekennzeichneten Werte) $-3,4\%$. Die mittleren Abweichungen

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{(A_{\text{exp}} - A_{\text{exp}})^2}{A_{\text{exp}}^2}}$$

betragen für das Rohr A $\pm 2\%$, für das Rohr B $\pm 8,5\%$.

Systematische Fehler lassen sich mit völliger Sicherheit sowohl für die Spannungsmessungen wie für die Strommessungen nicht ausschalten. Das gilt noch mehr für die nach Gl. (3') zur Bestimmung von A_{exp} benötigte Temperatur $T(0)$ auf der Achse der Entladung. Am größten dürfte jedoch der dem Faktor Q innewohnende Fehler sein. Zunächst einmal ergibt sich schon dadurch ein Fehler, daß es experimentell nicht möglich ist, die Temperatur bis auf die Rohrwand hin zu messen. Es wird daher eine Extrapolation des Temperaturverlaufs nötig.

1	2	3	4	5	6	7	8
Rohr	T °K	$T(0)$ °K	n_e cm ⁻³	A_{exp} $\Omega \text{ cm } (^{\circ}\text{K})^{3/2}$	$A_{\text{th}} = 6,53 \cdot 10^3 \ln A$ $\Omega \text{ cm } (^{\circ}\text{K})^{3/2}$	$A_{\text{exp}} - A_{\text{th}}$ $\Omega \text{ cm } (^{\circ}\text{K})^{3/2}$	$A_{\text{exp}} - \bar{A}_{\text{exp}}$ $\Omega \text{ cm } (^{\circ}\text{K})^{3/2}$
A ($L = 100 \text{ mm}$)	$2,61 \cdot 10^4$	$3,23 \cdot 10^4$	$4,6 \cdot 10^{16}$	$3,89 \cdot 10^4$	$36 \cdot 10^3$	$+2,9 \cdot 10^3$	$-0,4 \cdot 10^3$
	2,80	3,43	6,4	3,95		$+3,5$	$+0,2$
	3,07	3,52	6,5	3,97		$+3,7$	$+0,4$
	3,26	3,71	8,2	4,00		$+4,0$	$+0,7$
	3,40	3,78	9,4	3,83		$+2,3$	$-1,0$
				$\bar{A}_{\text{exp}} = 3,93 \cdot 10^4$			
B ($L = 150 \text{ mm}$)	$2,56 \cdot 10^4$	$3,57 \cdot 10^4$	$9,3 \cdot 10^{16}$	$3,35 \cdot 10^4$	$34 \cdot 10^3$	$-0,5 \cdot 10^3$	$-1,5 \cdot 10^3$
	2,56	3,57	9,3	3,76 *		$+3,6$	
	2,70	3,86	10,8	3,65		$+2,5$	$+1,5$
				$\bar{A}_{\text{exp}} = 3,50 \cdot 10^4$			
	2,45	3,17	2,0	$3,95 \cdot 10^4$	38	$+1,5$	$+4,4$
	2,58	3,94	3,0	3,33		$-4,7$	$-1,8$
	2,76	4,23	3,5	3,24		$-5,6$	$-2,7$
	2,76	4,23	3,5	3,90 *		$+1,0$	
				$\bar{A}_{\text{exp}} = 3,51 \cdot 10^4$			

Tab. 1. Elektrischer Widerstand des Plasmas.

Der dadurch entstehende Fehler sollte jedoch kleiner als 10% bleiben. Siehe dazu Abb. 20. Weiterhin wird T mit einem Fehler behaftet sein, sobald die Voraussetzung, daß die Entladung zylindersymmetrisch sei, nicht mehr zutrifft. Insbesondere sollten die in Teil I beschriebenen im Rohr A beobachteten Strukturen (Abb. 10) eine Verflachung des Temperaturabfalls zur Wand hin verursachen. Tatsächlich ist — bei vergleichbaren Bedingungen — der im Rohr A beobachtete Temperaturabfall geringer als der im Rohr B, in dem die Strukturen nicht beobachtet wurden. Eine Folge davon ist, daß der Wert von Q und damit der von A_{exp} zu groß bestimmt wird. Das kann der Grund dafür sein, daß im Rohr A der experimentelle Wert im Mittel um 8,6% größer ist als der theoretische Wert, wohingegen im Rohr B A_{exp} im Mittel um 3,4% kleiner als A_{th} ist.

Den mit einem Stern versehenen Meßwerten A_{exp}^* in der Tab. 1 liegen Spannungsmessungen zwischen zwei 40 mm entfernten Sonden (Abb. 1) am anodenseitigen Ende des zylindrischen Teils des Entladungsrohres zugrunde. Sie sind ungefähr um 10% größer als die ungestörten Werte. Diese ergeben sich aus Spannungsmessungen zwischen Sonden, die symmetrisch zur Mitte des Entladungsrohres angeordnet sind (Abb. 1). Diese Spannungserhöhung ist stets mit der in Teil II erwähnten Temperaturerniedrigung (Abb. 10) im anodenseitigen Teil des Entladungsrohres korreliert. Dieser Effekt ist von der Theorie her zu erwarten. Darauf soll hier aber nicht

eingegangen werden, insbesondere, weil systematische Messungen dazu noch nicht gemacht werden konnten. Es kann ausgeschlossen werden, daß die in Rede stehende Temperaturerniedrigung die Messung der maximalen Temperatur $T(0)$ und den radialen Temperaturverlauf und damit den Wert des Faktors $Q(q)$ merklich verfälscht.

Die angeführten Korrelationen zwischen den elektrischen und spektroskopischen Meßdaten dürften für die Empfindlichkeit der verwendeten Meßmethoden sprechen. Im jetzigen Stadium der Messungen können sie nur als systematische Abweichungen — Fehler — von idealen Bedingungen gewertet werden. Diese Abweichungen verhindern aber z. B. zu entscheiden, ob der theoretische Wert von $\ln A$ am besten um die auf S. 291 angeführten 12 bis 17% zu erniedrigen sei, wie ein Blick auf die Spalten 5, 6, 7 und 8 der Tab. 1 zeigt.

IV. Leistungsbilanz

Die Leistungsbilanz der Entladung je Raumeinheit kann in voller Allgemeinheit sicher folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathbf{j} \cdot \nabla + \text{div} (\kappa \text{ grad } T) - W_s - \Delta' = 0,$$

d. h. bei Zylindersymmetrie:

$$\mathbf{j} \cdot \nabla + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) - W_s - \Delta' = 0. \quad (6)$$

In den vorhergehenden Teilen dieser Arbeit sind alle Größen bestimmt worden, die erforderlich sind,

um einerseits die elektrische Leistungszufuhr je Raumeinheit ($j \cdot \mathcal{E}$), andererseits die Leistungsabfuhr je Raumeinheit durch die Wärmeleitung freier Elektronen $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \kappa \frac{\partial T}{\partial r}\right)\right)$ und die durch optisch dünne Strahlung (W_S) zu berechnen. Die Größe Δ' [selbstverständlich ebenfalls von der Dimension (Leistung/Raumeinheit)] faßt die Leistungsabfuhr auf anderen möglichen Wegen zusammen. Insbesondere ist in Δ' also auch der Anteil der optisch nichtdünnen Strahlung enthalten!

Für κ wird der theoretische Wert nach SPITZER⁷ (S. 86 ff.)

$$\kappa = 1,96 \cdot 10^{-11} \frac{\varepsilon(Z) \delta(Z) T^{5/2}}{Z \ln A} \quad \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^\circ \text{K}}$$

verwendet. Für seine Ableitung gilt das auf S. 291 im Anschluß an Gl. (3) Gesagte in analoger Weise. Der Faktor $\delta(Z)$ berücksichtigt die Wirkung von Elektronenstößen untereinander. Der Faktor $\varepsilon(Z)$ drückt die Tatsache aus, daß κ davon abhängt, ob in Richtung des Wärmestromes ein elektrischer Strom fließen kann oder nicht.

Da, wie erwähnt, die zweifache Ionisation stets vernachlässigt werden kann, gilt $Z=1$ und daher — nach SPITZER⁷ —

$$\delta(1) = 0,225 \quad \text{und} \quad \varepsilon(1) = 0,419.$$

Damit wird

$$\kappa = 1,85 \cdot 10^{-12} (T^{5/2} / \ln A) \quad \text{Watt/cm}^\circ \text{K}.$$

Die Leistung der optisch dünnen Strahlung je Raumeinheit wurde wie folgt bestimmt:

Die Intensitäten der ersten 3 Linien des neutralen Heliums $\lambda = 584,4 \text{ \AA}$, $\lambda = 537,1 \text{ \AA}$ und $\lambda = 522,2 \text{ \AA}$ aus optisch dünner Schicht, deren unterer Zustand der Helium-Grundzustand $1S$ ist, wurden exakt berechnet¹⁶. Die Intensität des Seriengrenzkontinuums wurde ebenfalls berechnet. Die fehlende Linienstrahlung wurde dadurch berücksichtigt, daß die Seriengrenze (in der Frequenzskala) bis zur Frequenz der 4. Linie zurückverlegt wurde. Dieser Anteil der Linienstrahlung wird dadurch mit weniger als 20% Abweichung vom exakten Wert angegeben, wie sich leicht abschätzen läßt. Die Strahlung, die durch Übergang in Niveaus mit der Hauptquantenzahl $n=2$ und höheren Hauptquantenzahlen zustande kommt, wurde nach demselben Schema, aber wie für Wasserstoff, berechnet. Nur das statistische Gewicht

$2n^2$ des Wasserstoffs wurde durch $4n^2$ ersetzt. Das entspricht der Tatsache, daß es beim Wasserstoff 2 Spineinstellungen des Elektrons gibt, während die beiden Elektronen des Heliums 4 Möglichkeiten — 1 Singulettzustand + 3 Triplettzustände — haben. Der Anteil dieser Strahlung beträgt weniger als 15% der Strahlung, die durch Übergang in den Heliumgrundzustand entsteht. Der durch die Wasserstoff-Rechnung verursachte Fehler kann aber nicht größer als 5% dieser Strahlung sein.

Durch ganz analoge Rechnungen wurde der Anteil der optisch dünnen He II-Strahlung berechnet. Zu dieser gehören die ersten 3 He II-Linien mit dem unteren Zustand als Grundzustand nicht (siehe Anhang I).

Der Anteil der frei-frei-Strahlung ist gegenüber dem der genannten Strahlung um 2 Größenordnungen kleiner und daher zu vernachlässigen.

Das Ergebnis aller Rechnungen wird durch Abb. 21 veranschaulicht. Sie gibt die Abhängigkeit der abgestrahlten Energie von der Temperatur bei

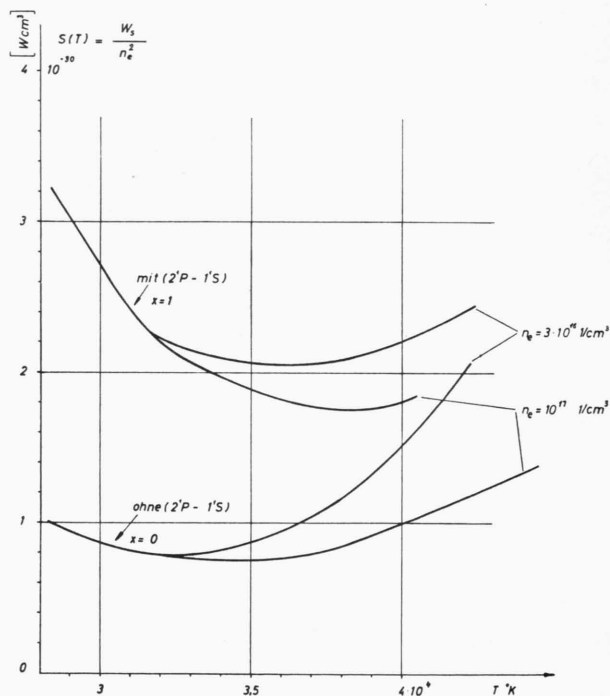


Abb. 21. Strahlungsleistung des Heliums. Nach den im Anhang durchgeführten Rechnungen läßt sich die gesamte, aus optisch dünner Schicht, emittierte Strahlung zweckmäßig durch

$$W_S = S(T) n_e^2 \quad [\text{W/cm}^3]$$

darstellen. Hier ist $S(T)$ $[\text{W/cm}^3]$ gegen T für $n_e = 3 \cdot 10^{16}$ und 10^{17} cm^{-3} aufgetragen. $x=0$ bzw. $x=1$ bedeutet ohne bzw. mit Berücksichtigung der Strahlungsleistung pro cm^3 der He I Linie $\lambda = 584 \text{ \AA}$ ($2^1p - 1^1s$).

¹⁶ Diese und die weiteren Rechnungen sind im Anhang II zusammengestellt.

Elektronendichten von $n_e = 3 \cdot 10^{16}$ und $n_e = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ wieder. Die Rechnungen sind einmal mit ($x=1$) und einmal ohne ($x=0$) Berücksichtigung der Strahlungsenergie der He I-Linie $\lambda = 584 \text{ \AA}$ ($2^1\text{P} - 1^1\text{S}$) gemacht worden. Im Falle hoher Elektronendichten ($n = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) wird diese Linie sicher nicht aus optisch dünner Schicht abgestrahlt (siehe Anhang I). Daher entspricht der wirklichen Energieabfuhr durch Strahlung eine Kurve, die zwischen den Kurven $x=0$ und $x=1$ liegt. Die aus Abb. 21 ersichtliche Abnahme der Strahlungsleistung mit steigender Temperatur ist auf das Aussterben der He I-Strahlung zurückzuführen, der Wiederanstieg auf das Einsetzen der He II-Strahlung.

Dabei ist die Strahlung der ersten 3 He II-Linien mit dem Grundzustand als unterem Zustand nicht berücksichtigt, da diese Linien – wie gesagt – aus optisch nicht dünner Schicht emittiert werden; der Absorptionskoeffizient der ersten Linie ($2-1$) $\lambda = 303,7 \text{ \AA}$ ist von der Größenordnung 100 cm^{-1} . Die Berechnung der Strahlung im Frequenzbereich dieser Linien ist sehr schwierig. Auch kann sie kein exaktes Ergebnis liefern, weil der Verbreiterungsmechanismus der stärksten He II-Linie $\lambda = 303,7 \text{ \AA}$ keineswegs gut bekannt ist. Um einen Anhalt über den Beitrag dieser Strahlung zu gewinnen, wurden – von verschiedenen Modellvorstellungen ausgehend – Abschätzungen vorgenommen. Ihr Ergebnis ist, daß dieser Beitrag besonders bei den kleinen Elektronendichten von derselben Größenordnung wie der der optisch dünnen Strahlung sein kann und daher einen nicht zu vernachlässigenden Anteil der Größe Δ ausmachen kann (aber nur im Falle des 150 mm langen B-Rohres). Da die Darstellung dieser Abschätzungen unverhältnismäßig umfangreich wäre, wurde sie in den Anhang nicht aufgenommen.

Um übersehen zu können, wie gut die Leistungsbilanzgleichung erfüllt ist, ist es zweckmäßig, diese einmal zu integrieren, was unter Berücksichtigung von $j = E/\eta(T)$ auf

$$E^2 \int_0^y \frac{r dr}{\eta(T)} + y \kappa \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_y - n_e^2 \int_0^y S(T) r dr - \Delta^* = 0 \quad (7)$$

führt. y bezeichnet die Stelle des Rohrradius, an der der Temperaturgradient beobachtet wird. Statt

$W_S(T)$ wird $n_e^2 S(T)$ geschrieben, wie es die Berechnungen (in Anhang II) nahelegen. Zum besseren Anschluß an die Meßgrößen ist es weiterhin zweckmäßig, Gl. (7) wie folgt umzuformen:

$$\frac{E^2 y^2}{\eta[T(0)]} \int_0^y \frac{\eta[T(0)]}{\eta[T(r)]} \frac{r dr}{y^2} + y \kappa \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_y - n_e^2 y^2 S[T(0)] \int_0^y \frac{S[T(r)]}{S[T(0)]} \frac{r dr}{y^2} - \Delta^* = 0.$$

Nach Einführung von Gl. (3') und Gl. (5) (in Teil III) erhält man daraus

$$\frac{E I}{\pi \varrho^2} \frac{Q(y)}{Q(0)} + \frac{2}{y} \kappa \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_y - n_e^2 S[T(0)] L(y) - \Delta = 0, \quad (9)$$

worin noch abkürzend

$$Q(y) = 2 \int_0^y \left[\frac{T(r)}{T(0)} \right]^{3/2} \frac{r dr}{y^2}$$

und

$$L(y) = 2 \int_0^y \frac{S[T(r)]}{S[T(0)]} \frac{r dr}{y^2}$$

gesetzt wurde.

Diese letzten beiden Größen wurden graphisch mit Hilfe von Darstellungen wie der Abb. 20 gewonnen.

In den nachfolgenden Tabellen sind für verschiedene Temperaturen und Elektronendichten die Werte dieser Größen zusammengestellt. Weiterhin ist in der ersten Spalte der Abstand von der Rohrmittle y angegeben, bei dem der in der 3. Spalte verzeichnete Temperaturgradient $\partial T/\partial r|_y$ beobachtet wurde. $\partial T/\partial r|_y$ wurde aus den graphischen Darstellungen Abb. 17, 18, 19 bestimmt.

Im Falle des 150 mm langen Rohres (Tab. 2 und 3) ist die Leistungsbilanz im Rahmen der diskutierten Genauigkeit ausgeglichen.

Im Falle des 100 mm langen Rohres (Tab. 4) ist das aber nicht der Fall. Das mußte wegen der beobachteten Abweichung von der Zylindersymmetrie des Plasmas (Abb. 10) erwartet werden. Diese Abweichungen haben einmal eine Verfälschung, d. h. eine Verflachung des Temperaturprofils zur Folge, wie ein Vergleich der radialen Temperaturverläufe im langen und kurzen Rohr (Abb. 17 und 18) zeigt. Zum anderen kann aber nicht ausgeschlossen werden, daß diese Abweichungen von der Zylindersymmetrie des Plasmas die Folge eines weiteren energieabführenden Mechanismus (einer Instabilität) sind.

1	2	3	4	5	6	7
y	T	$\frac{\partial T}{\partial r} \Big _y$	$\frac{Q_y EI}{Q_0 \pi r_0^2}$	$\frac{2}{y} \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \Big _y$	$L(y) n_e^2 \cdot S[T(0)]$	Δ
cm	°K	°K cm ⁻¹	Wcm ⁻³	Wcm ⁻³	Wcm ⁻³	Wcm ⁻³
(a) $I = 2,6$ kA; $E = 9,6$ V/cm; $Q(\varrho) \cong 0,5$; $T(0) = 3,94 \cdot 10^4$ °K, $n_e = 3 \cdot 10^{16}$ cm ⁻³ .						
0,1	$3,94 \cdot 10^4$	$0,3 \cdot 10^4$	$2,3 \cdot 10^4$	$(0,6) \cdot 10^4$	$0,2 \cdot 10^4$	$(1,5) \cdot 10^4$
0,2	3,93	0,65	2,3	0,6	0,2	1,5
0,3	3,8	1,1	2,1	0,6	0,2	1,3
0,4	3,6	3	2,1	1,1	0,2	0,8
0,5	3,3	3	1,8	0,7	0,2	0,9
(b) $I = 3,1$ kA; $E = 10,1$ V/cm; $Q(\varrho) \cong 0,5$; $T(0) = 42,2 \cdot 10^3$ °K; $n_e = 3,5 \cdot 10^{16}$ cm ⁻³ .						
0,1	$4,2 \cdot 10^4$	$0,4 \cdot 10^4$	$2,8 \cdot 10^4$	$(0,9) \cdot 10^4$	$0,3 \cdot 10^4$	$(1,6) \cdot 10^4$
0,2	4,17	0,9	2,8	1,0	0,3	1,5
0,3	4,05	1,7	2,5	1,1	0,3	0,9
0,4	3,85	2,3	2,2	1,0	0,3	0,9
0,5	3,58	3,1	2	0,9	0,2	0,9

Tab. 2. Entladungen mit kleinen Elektronendichten, Entladungsrohr B. Die Strahlungsleistung wurde berechnet einschließlich der im Frequenzbereich der He I Linie $\lambda = 584$ Å ($x=1$, siehe Abb. 21).

1	2	3	4	5	6		7	
y	T	$\frac{\partial T}{\partial r} \Big _y$	$\frac{Q(y) EI}{Q(\varrho) \pi r_0^2}$	$\frac{2\kappa}{y} \frac{\partial T}{\partial r} \Big _y$	$L(y) n_e^2 S[T(0)]$		Δ	
					ohne $x=0$	mit $x=1$	ohne $x=0$	mit $x=1$
cm	°K	°K cm ⁻¹	W cm ⁻³	W cm ⁻³	W cm ⁻³	W cm ⁻³	W cm ⁻³	W cm ⁻³
a) $I = 3,9$ kA; $E = 13,7$ V/cm; $Q(\varrho) = 0,6$; $n_e = 10,8 \cdot 10^{16}$ cm ⁻³ ; $T(0) = 38,3 \cdot 10^3$ °K.								
0,1	$3,83 \cdot 10^4$	$0,55 \cdot 10^4$	$4,0 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^4$	$2,0 \cdot 10^4$	$(+ 0,5) \cdot 10^4$	$(- 0,5) \cdot 10^4$
0,2	3,75	0,7	4,0	1,4	1,0	2,0	+ 1,6	+ 0,6
0,3	3,65	1	3,6	1,3	1,0	2,0	+ 1,3	+ 0,3
0,4	3,55	1,3	3,2	1,2	0,9	2,1	+ 1,1	- 0,1
0,5	3,4	2,1	2,8	1,4	0,9	2,1	+ 0,4	- 0,7
b) $I = 3,4$ kA; $E = 12,7$ V/cm; $Q(\varrho) \cong 0,6$; $n_e = 9,3 \cdot 10^{16}$ cm ⁻³ ; $T(0) = 35,6 \cdot 10^3$ °K.								
0,1	$3,56 \cdot 10^4$	$0,3 \cdot 10^4$	$3,3 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^4$	$0,6 \cdot 10^4$	$1,6 \cdot 10^4$	$(+ 1,5) \cdot 10^4$	$(+ 0,5) \cdot 10^4$
0,2	3,50	0,7	3,3	1,3	0,6	1,6	+ 1,4	+ 0,4
0,3	3,40	1,1	3	1,2	0,6	1,7	+ 1,2	+ 0,1
0,4	3,27	1,6	3	1,3	0,6	1,8	+ 1,1	- 0,1

Tab. 3. Entladungen mit großen Elektronendichten; Entladungsrohr B. Die Strahlungsleistung wurde berechnet einmal mit ($x=1$) und einmal ohne ($x=0$) Berücksichtigung des Beitrages der He I Linie $\lambda = 584$ Å:

Das erscheint aber nicht sehr wahrscheinlich, da sich die beobachteten Strukturen während der gesamten Entladungsdauer nur sehr wenig ändern.

Herrn Dr. WULFF, dem Leiter des Projekts Eieruhr, bin ich besonders dankbar für die Anregung zu dieser Arbeit und seine ständige Betreuung.

Herrn Professor Dr. W. HEISENBERG und Herrn Dr. G. v. GIERKE danke ich für die Möglichkeit, die vorliegende Arbeit im Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik anzufertigen.

Es ist für mich eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. FÜNFER für sein Interesse an dieser Arbeit zu danken.

1	2	3	4	5	6	7
y cm	T °K	$\frac{\partial T}{\partial r_y}$ °K cm ⁻¹	$\frac{EI}{\pi r_0^2} \frac{Q(y)}{Q(0)}$ W cm ⁻³	$\frac{2\kappa}{y} \cdot \frac{\partial T}{\partial r_y}$ W cm ⁻³	$L_y n_e^2 S[T(0)]$ W cm ⁻³	Δ W cm ⁻³
0,1	$3,7 \cdot 10^4$	$0,1 \cdot 10^4$	$4,2 \cdot 10^4$	$0,4 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^4$	$(+ 2,6) \cdot 10^4$
0,2	3,68	0,3	4,2	0,6	1,2	+ 2,4
0,3	3,66	0,3	4,2	0,4	1,2	+ 2,6
0,4	3,62	0,4	4,2	0,4	1,2	+ 2,6
0,5	3,59	0,45	4,2	0,4	1,2	+ 2,6

Tab. 4. Rohr A, Struktur (siehe Abb. 10). Die Strahlungsleistung wurde berechnet mit Berücksichtigung ($x=1$) des Beitrages des He I $\lambda=584 \text{ \AA}$. $I=4,9 \text{ kA}$; $E=15,2 \text{ V/cm}$; $Q(0)=0,83$; $n_e=8,2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$; $T(0)=37,1 \cdot 10^3 \text{ °K}$.

Anhang I

Die optische Tiefe der He-Linien

Die optische Tiefe ist definiert durch

$$\tau = \int_0^l \kappa_\nu dl,$$

dl ist die infinitesimale Schichtdicke, κ_ν ist der Absorptionskoeffizient

$$\kappa_\nu = (\pi e^2 / m c) N f A_\nu. \quad (1)$$

Darin bedeuten m =Masse des Elektrons, N =Anzahl der Teilchen pro cm^3 im unteren Zustand, f =Absorptionsschwingungsstärke, A_ν =Verteilungsfunktion (Linienkontur) der Spektrallinie, für die die Normierung $\int A_\nu d\nu = 1$ gilt.

Unter den gegebenen experimentellen Bedingungen ist die optische Tiefe nur größer als 1 im Bereich von Spektrallinien, deren unterer Zustand der Grundzustand ist und für die das Produkt Nf daher hinreichend groß ist. Die spektrale Verteilung A_ν (d. h. also die Linienkontur) konnte nicht direkt gemessen werden, da die in Frage kommenden Linien im fernen U.V. liegen. A_ν wurde daher entweder theoretisch nach UNSÖLD¹⁵ oder nach TRAVING¹⁷ oder am Anschluß an eine experimentelle Arbeit von WULFF² bestimmt. Zum genauen Verständnis muß im folgenden auf diese Arbeiten verwiesen werden.

Es ergibt sich im einzelnen:

Die He I-Linie $\lambda=584 \text{ \AA}$ ($2^1\text{P}-1^1\text{S}$) ist im wesentlichen durch den DOPPLER-Effekt verbreitert. Dann gilt

$$A_\nu = (1/\sqrt{\pi} \Delta\nu_D) \exp \{ -(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2 \}$$

mit

$$\Delta\nu_D = (\nu/c) \sqrt{2 k T / m}.$$

Für die Linienmitte ($\Delta\nu=0$) ist A_ν am größten. Nach Gl. (1) ergibt sich für $\Delta\nu=0$ $\kappa_\nu=16 \text{ cm}^{-1}$ mit $f=0,35$

bei $n_e=10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $\bar{v}=10^6 \text{ cm/sec}$ und $T=35\,000 \text{ °K}$, bzw. $\kappa_\nu=0,64 \text{ cm}^{-1}$ bei $n_e=2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ und $T=35\,000 \text{ °K}$.

Im Falle des nächstfolgenden Seriengliedes, der He I-Linie $\lambda=537 \text{ \AA}$ ($3^1\text{P}-1^1\text{S}$) ist der dominierende Verbreiterungsmechanismus der durch Stoßdämpfung freier Elektronen. Es gilt dann

$$A_\nu = \frac{\gamma/2 \pi}{(\Delta\nu)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (2)$$

Darin ist $\gamma = 6,2 \cdot C^{2/3} v^{1/3} n_e$ (s. Anm. 18), (3)

wenn die Stoßdämpfung durch quadratischen STARK-Effekt erfolgt. Eben diese Voraussetzung ist für den Übergang ($3^1\text{P}-1^1\text{S}$) nicht mehr streng erfüllt, wie in der zitierten Arbeit von WULFF² gezeigt wird¹⁹. An Stelle des in der Literatur angegebenen Wertes²⁰ der (quadratischen) STARK-Effektkonstanten $C=2,2 \cdot 10^{-13} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^4$ hat man danach den halb so großen Wert in Gl. (3) einzusetzen, um die Dämpfungskonstante γ zu erhalten, die der beobachteten Halbwertsbreite der Linie entspricht. Nach Gl. (2) ergibt sich damit für die Linienmitte ($\Delta\nu=0$) mit $f=0,07$, $T=35\,000 \text{ °K}$ und $v_e=10^8 \text{ cm/sec}$ $\kappa_{\nu\text{Mitte}}=2,0 \cdot 10^{-17} n_e \text{ cm}^{-1}$.

Da der Radius des Entladungskanals $0,8 \text{ cm}$ beträgt, ist die optische Tiefe $\kappa_\nu \cdot l$ von der äußeren Schicht bis zum halben Abstand des Rohrradius bei $n_e=10^{17} \text{ cm}^{-3}$ $\tau=0,8$. Diese Linie wird also noch nicht durchweg aus optisch dünner Schicht abgestrahlt. Alle höheren Serienglieder werden jedoch wegen ihrer größeren STARK-Effektanfälligkeit und ihrer kleineren Oszillatorenstärke ohne Einschränkung aus optisch dünner Schicht emittiert.

Die He II-Linien verbreitern wie die BALMER-Linien gemäß der statistischen (quasistatischen) Theorie. Die Verbreiterungsfunktion A_ν ist in diesem Falle nicht in geschlossener Form anzugeben. Um Anschluß an die von UNDERHILL und WADDELL²¹ angegebenen numeri-

¹⁵ A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, Springer-Verlag, Berlin 1955.

¹⁷ G. TRAVING, Über die Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1959.

¹⁸ Nach E. LINDHOLM. Siehe dazu bei UNSÖLD¹⁵.

¹⁹ Statt auf den Übergang ($3^1\text{P}-1^1\text{S}$) beziehen sich die WULFFschen Untersuchungen auf den Übergang ($3^1\text{P}-$

2^1S). Da der STARK-Effekt aber praktisch nur vom oberen Term abhängt, macht das keinen Unterschied.

²⁰ Siehe ². Die dort aufgeführten STARK-Effekt-Konstanten in $\text{cm}^{-1} \cdot (\text{kV/cm})^{-2}$ müssen mit $c e^2 \cdot 9 \cdot 10^{-2}$ multipliziert werden, um auf die hier benützten C in $\text{s}^{-1} \text{ cm}^4$ zu kommen.

²¹ A. B. UNDERHILL u. J. H. WADDELL, Nat. Bur. Stand. Circ. 603, 1959.

schen Werte der Verteilungsfunktion gewinnen zu können, muß der Absorptionskoeffizient wie folgt umgeschrieben werden:

$$\kappa_\nu = \frac{\pi e^2}{m c} N f \frac{\lambda^2}{c} \frac{z^5}{F_0} S(\alpha). \quad (4)$$

Darin sind z die Kernladungszahl, $F_0 = 1,25 \cdot 10^{-9} n_e^{2/3}$ die HOLTSMARKSche Normalfeldstärke der statistischen Theorie und $S(\alpha)$ die bei UNDERHILL und WADDEL tabulierte Verteilungsfunktion mit $\alpha = \Delta\lambda/F_0$ ($\Delta\lambda$ Abstand in Wellenlängeneinheiten von der Linienmitte). In dem vom Experiment erfaßten Temperatur- und Dichtebereich gilt stets, daß die Anzahl der Teilchen im He II-Grundzustand $N = n_{\text{ion}} = n_e$ ist. κ_ν ist daher proportional zu $n_e^{1/2}$. Wegen dieser schwachen Abhängigkeit wird für die folgende Abschätzung an Hand des Tafelwerks²² von UNDERHILL und WADDEL²¹ $n_e = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, also eine mittlere Elektronendichte, zugrunde gelegt. Es wurde die He II-Linie aufgesucht, für die $\kappa_\nu \cdot l = \kappa_\nu \cdot 0,4$ in der nahen Umgebung des Linienzentrums ≈ 1 ist. Das ist für die Linie $\lambda = 237 \text{ \AA}$ (5-1) der Fall. Für den Frequenzabstand von der Linienmitte, an dem ihre Maximalintensität auf 2/3 gesunken ist, gilt gerade $\kappa_\nu \cdot 0,4 \approx 1$. Der Übergang von optisch dicken Linien ($\kappa_\nu \cdot 0,4 \gg 1$) zu optisch dünnen Linien ($\kappa_\nu \cdot 0,4 \ll 1$) ist bei den He II-Linien nicht sehr scharf definiert. Selbst die Rekombinationsstrahlung erfolgt nicht aus völlig optisch dünner Schicht. Bei einer Elektronendichte von $n_e = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ z. B. gilt für die Grenze ν_0 des Seriegrenzkontinuums $\kappa_\nu = 0,1 \text{ cm}^{-1}$. (Über den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten siehe Anhang II.) Die vorstehenden Abschätzungen sind gemacht worden, um die zur Berechnung der Strahlungsverluste nötigen Schematisierungen vornehmen zu können.

Anhang II

Berechnung der Strahlungsverluste

A. Frei-frei-Strahlung

Die Strahlungsleistung der frei-frei-Übergänge war stets kleiner als 3% der zugeführten Leistung und wird daher vernachlässigt.

B. He I-Strahlung

1. Übergänge mit dem Endzustand 1¹S

Die Strahlungsleistung pro cm^3 der ersten drei Linien aus optisch dünner Schicht wurde zunächst exakt berechnet

$$W_{\text{Linien}} = \sum_{n=2}^4 A_{nl} h \nu_{nl} N_n,$$

worin A die Übergangswahrscheinlichkeiten, N_n die Anzahl pro cm^3 im oberen Zustand n bedeuten. Eliminiert man N_n mit Hilfe der SAHA-Gleichung

niert man N_n mit Hilfe der SAHA-Gleichung

$$\frac{n_e n^+}{n_n} = \frac{2 u}{g_n} \left(\frac{2 \pi m k}{h^2} \right)^{3/2} \cdot T^{3/2} \cdot \exp \left\{ - \frac{\chi_{\text{ion}}^I - \chi_n^I}{k T} \right\},$$

so ergibt sich mit $u=2$ (die Zustandssumme des einfach ionisierten Heliumatoms), $g_2 = g_3 = g_4 = 3$ (das statistische Gewicht des oberen Zustands) und

$$2 \left(\frac{2 \pi m k}{h^2} \right)^{3/2} = 5,12 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} (\text{°K})^{-3/2},$$

$$W_{\text{Lin.}} = 2,94 \cdot 10^{-16} \frac{n_e n^+}{T^{3/2}} \sum_{n=2}^4 A_{nl} \chi_n^I \exp \left\{ \frac{\chi_{\text{ion}}^I - \chi_n^I}{k T} \right\} \quad (1)$$

[erg/s cm^3].

Die Übergangswahrscheinlichkeiten $A_{21} = 2,3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$, $A_{31} = 5,6 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$, $A_{41} = 2,3 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$ wurden den Astrophysical Quantities²³ entnommen, die Differenz zwischen den Ionisations- und Anregungsenergien

$$\chi_{\text{ion}}^I - \chi_2^I = 3,4 \text{ eV}, \quad \chi_{\text{ion}}^I - \chi_3^I = 1,3 \text{ eV}, \quad \chi_{\text{ion}}^I - \chi_4^I = 0,8 \text{ eV}$$

den Spektraltabellen von MOORE⁸. Das Ergebnis der Rechnungen wird auf S. 294 angegeben.

Die Strahlungsleistung pro cm^3 der Rekombinationsstrahlung in den 1¹S-Grundzustand ist gegeben durch $\int 4 \pi \varepsilon_\nu^{\text{SP}} d\nu$. Der (spontane) Emissionskoeffizient $\varepsilon_\nu^{\text{SP}}$ wurde mit Hilfe des KIRCHHOFFSchen Satzes aus dem Absorptionskoeffizienten berechnet:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\nu^{\text{SP}} &= \kappa_\nu (1 - e^{-h\nu/kT}) B_\nu(T) \\ &= \kappa_\nu (1 - e^{-h\nu/kT}) \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \\ &= \kappa_\nu \frac{2 h \nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}. \end{aligned} \quad (2)$$

Für den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten

$$\kappa_\nu = (\pi e^2/m c) N df/d\nu$$

gilt

$$\int_{\nu_0}^{\infty} \kappa_\nu d\nu = (\pi e^2/m c) N f = (\pi e^2/m c) N \cdot 1,55$$

und ungefähr $df/d\nu \sim 1/\nu^2$ (s. bei UNSÖLD¹⁵, S. 171), woraus

$$\kappa_\nu = (\pi e^2/m c) N \cdot 1,55 (\nu_0/\nu^2)$$

folgt. ν_0 ist die Frequenz der Seriegrenze. Dieser Ausdruck wird in Gl. (2) eingesetzt und N die Anzahl der Teilchen pro cm^3 im Grundzustand mit Hilfe der SAHA-Gleichung ausgedrückt. Dann gibt Multiplikation mit 4π und Integration von einer zunächst offen gelassenen Grenzfrequenz ν_G an die gesamte Strahlungsleistung pro cm^3 im Frequenzbereich $\nu > \nu_G$

$$\begin{aligned} 4 \pi \int_{\nu_G}^{\infty} \varepsilon_\nu^{\text{SP}} d\nu &= n_e n^+ \cdot \frac{8 \pi^2 e^2 h^3}{m c^3 (2 \pi m)^{3/2}} \\ &\cdot \frac{g_1}{2 u} f \nu_0 \nu_G \left(1 + \frac{k T}{\chi_G^I} \right) \frac{\exp \left\{ \frac{\chi_{\text{ion}}^I - \chi_G^I}{k T} \right\}}{(k T)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (3)$$

²² Dort sind auch die f -Werte tabuliert.

²³ C. W. ALLEN, Astrophysical Quantities, Athlone Press, London 1955.

worin $g_1=1$ das statistische Gewicht des Grundzustandes und $\chi_G^I = h \nu_G$ die Grenzenenergie ist. Um die Leistung der Strahlungsübergänge (n^1P-1^1S) mit $n > 4$ zu berücksichtigen, wird die Grenzfrequenz ν_G über die theoretische Seriengrenzfrequenz ν_0 hinaus verkleinert bis zum Mittel aus den Frequenzen, die zu den Übergängen (5-1) und (4-1) gehören. (Tatsächlich werden bei Elektronendichten $n_e \cong 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ keine Linien mit oberen Hauptquantenzahlen $n > 5$ beobachtet. Durch die Mikrofelder der Ionen und Elektronen werden die oberen Terme verschmiert und dadurch das Rekombinationskontinuum vorverlegt.) Dem entspricht eine Grenzenenergie von 23,8 eV. Der durch diese Vereinfachung entstehende Fehler kann durch Rechnung ermittelt werden. Er ist — im Rahmen unserer abschätzenden Rechnung — sehr klein. Der numerische Wert der Rechnungen wird auf S. 294 angegeben.

2. Übergänge mit den Endzuständen 2^1S , 2^1P , 2^3S , 2^3P

Die Strahlungsleistung der Übergänge mit dem Endzustand der Hauptquantenzahl $n=2$ ist um etwa eine Zehnerpotenz kleiner als die mit dem Endzustand $n=1$. Um die Rechnungen weniger umfangreich zu machen, wurde mit Wasserstoffübergangswahrscheinlichkeiten gerechnet. Die statistischen Gewichte $2n^2$ für Wasserstoff wurden durch $4n^2$ ersetzt, was der Tatsache entspricht, daß es statt der 2 Dublettzustände beim Wasserstoff deren 4 beim Helium — 1 Singulettzustand, 3 Triplettzustände — gibt. Statt der verschiedenen Übergangsenergien zu den Niveaus mit verschiedener azimuthaler Quantenzahl wurde eine mittlere Übergangsenergie eingeführt. Der durch diesen Vorgang entstehende Fehler sollte jedenfalls kleiner als 5% der gesamten Strahlungsleistung sein.

Die Strahlungsleistung des Überganges (3-2) wurde gesondert berechnet. Ganz analog zur Gl. (1) ergab sich

$$W_{3-2} = 3,5 \cdot 10^{-15} \frac{n_e n^+}{T^{3/2}} A_{32} \cdot \bar{\chi}_{32}^I \cdot \exp \left\{ \frac{\chi_{10n}^I - \bar{\chi}_3^I}{k T} \right\} \quad [\text{erg/s cm}^{-3}]$$

mit $A_{32} = 4,4 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$, $\bar{\chi}_{32}^I = h \bar{\nu}_{32} = 2,3 \text{ eV}$,
 $\chi_{10n}^I - \bar{\chi}_3^I = 1,5 \text{ eV}$.

Die höheren Serienglieder mit $n > 4$ wurden wiederum dem Kontinuum einverleibt. Analog zur Gl. (3)

ergab sich dann aus der KRAMERSschen Formel (s. ²⁴) für die frei-gebunden-Strahlung des Wasserstoffs (bei verdoppeltem Gewicht)

$$4 \pi \int \epsilon_{\nu}^{\text{SP}} d\nu = n_e n^+ 2 C \frac{16 \pi^3 e^4 m}{h^3 k^{1/2}} \frac{z^4}{n^3} \frac{\exp \left\{ \frac{\chi_{10n}^I - \chi_G^I}{k T} \right\}}{T^{1/2}}$$

mit $C = 6,4 \cdot 10^{-47}$ elektrostatischen cgs-Einheiten, $z=1$, $n=2$. Die Strahlung durch Übergänge zwischen Niveaus mit einer größeren Hauptquantenzahl als 2 konnte vernachlässigt werden.

Einen Überblick über den relativen Anteil der berechneten Einzelposten der He I-Strahlung gibt die folgende Darstellung der gesamten He I-Strahlungsleistung

$$W_{\text{HeI}} = n_e n^+ \cdot 6,4 \cdot 10^{-25} \frac{1}{T^{3/2}} 10^{0,65 \cdot 10^4/T} \cdot A \quad [\text{W/cm}^3] \quad (4)$$

wo die Summe

$$A = [3,7 \cdot x \cdot 10^{1,1 \cdot 10^4/T}] + 1 + [0,42 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3/T] + 0,095 \\ + [0,9 \cdot 10^{-4} \cdot T \cdot 10^{-3} \cdot 10^3/T] \\ + [0,17 \cdot 10^{-4} \cdot T \cdot 10^{1,5 \cdot 10^3/T}]$$

ist. Die ersten drei Summanden vertreten die relativen Anteile der Übergänge (2^1P-1^1S), (3^1P-1^1S), (4^1P-1^1S). Der vierte Summand gibt den Anteil des wasserstoffähnlich gerechneten Überganges (3-2) an. Der 5. und 6. Summand schließlich geben die Anteile der Strahlungsrekombinationen in den Grundzustand bzw. in die Zustände mit der Hauptquantenzahl 2. A wurde einmal mit ($x=1$) und einmal ohne ($x=0$) Berücksichtigung des Überganges (2^1P-1^1S) gerechnet. Die diesem Übergang entsprechende Strahlung erfolgt ja nach den Rechnungen im Anhang I aus nicht mehr optisch dünner Schicht.

C. Die gesamte Strahlungsleistung des Heliums

Die gesamte Strahlungsleistung pro cm^3 aus optisch dünner Schicht W_{He} für die beiden Elektronendichten $n_e = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ bzw. $3 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ in Abhängigkeit von der Temperatur kann man der Abb. 21 entnehmen. Dort ist der Verlauf der durch $W_{\text{He}} = n_e^2 S(T)$ definierten Funktion $S(T)$ dargestellt. Man erkennt den relativ großen Anteil des Überganges (2^1P-1^1S) ($x=0$ bzw. $x=1$).

²⁴ W. FINKELNBURG u. TH. PETER, Handbuch der Physik Bd. XXVIII, Verlag Springer, Berlin 1957.